

Министерство образования и науки РФ
Тверской государственный технический университет

В.В. Гараников, В.В. Щелин

**Руководство к решению курсовых задач
по курсам «Техническая механика»,
«Прикладная механика»
(раздел «Сопротивление материалов»)**

Учебное пособие

Издание первое

Тверь 2012

УДК 539.3.6(075.8)

ББК 30.121я7

Гараников, В.В. Руководство к решению курсовых задач по курсам «Техническая механика», «Прикладная механика» (раздел «сопротивление материалов»): учеб. пос. / В.В. Гараников, В.В. Щелин. 1-е изд. Тверь: ТГТУ, 2012. 80 с.

Рассмотрены примеры решения курсовых задач одного из разделов дисциплины «Механика» – курс сопротивление материалов. Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения, изучающих данный раздел механики.

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительных, дорожных машин и оборудования Тверского государственного технического университета Кондратьев А.В.; член национального комитета по теоретической и прикладной механике, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительство, строительные материалы и конструкции Тульского государственного университета Трещев А.А.

ISBN

© Тверской государственный
технический университет, 2012
© Гараников В.В., Щелин В.В., 2012

Введение

Данное учебное пособие посвящено одному из разделов дисциплины «Механика» - курсу сопротивление материалов. У студентов, изучающих этот курс, наибольшие трудности обычно возникают при решении задач. Настоящее пособие облегчит процесс изучения данного курса, а, главное, поможет овладеть методикой решения задач и получить необходимый навык в их решении.

В пособии в доступной форме рассмотрены основные типы решения задач для простых видов нагружения: растяжения – сжатия, кручения, изгиба. Также приведены примеры расчетов по темам: перемещения при изгибе, статически неопределимые системы, устойчивость стержневых систем. Пособие завершается темой, использующей понятия теории напряженного и деформированного состояний и критериев пластичности и разрушения.

Предусматривается, что студенты, прежде всего, должны ознакомиться с теоретическими положениями, методическими указаниями и решениями иллюстрированных примеров по рассматриваемому разделу. Это позволит им восстановить в памяти, лучше понять и освоить необходимые основы теории, осмыслить методику решения задач данного типа и приобрести сведения, достаточные для сознательного и самостоятельного их решения.

Пособие будет полезно при выполнении курсовых и расчетно-графических работ студентами очной и заочной форм обучения, изучающими данный раздел механики, на который, согласно учебным планам, выделяется только один семестр.

1. Построение эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии, кручении и прямом плоском изгибе с расчетами на прочность и жесткость

1.1. Растяжение-сжатие бруса

Комментарий

Правило знаков при построении эпюр нормальных сил

Брус нагружен внешними растягивающими силами (рис. 1.1а). Если рассечь брус и заменить отсеченную часть внутренней нормальной силой, то ее положительное направление будет от сечения (рис. 1.1б – при рассмотрении правой части, рис. 1.1в – при рассмотрении левой части). Для построения эпюры нормальных сил необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части бруса.

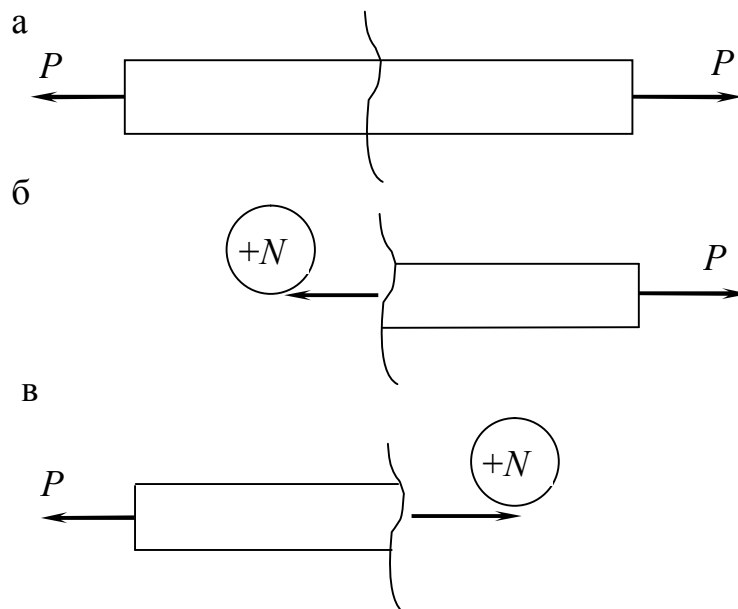


Рис. 1.1

Условие прочности при растяжении-сжатии:

$$\sigma_{\max} = \frac{N^{\max}}{F} \leq [\sigma],$$

где N^{\max} – максимальное значение нормальной силы; F – площадь поперечного сечения. Для круглого поперечного сечения

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Абсолютное удлинение отдельных участков бруса

Используя закон Гука, получим

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EF} + \alpha \Delta T l,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала; ΔT – изменение температуры; EF – жесткость стержня при растяжении; E – модуль упругости Эйлера – Юнга.

Если N постоянная величина, то

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha \Delta T l.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Для бруса, имеющего различные площади поперечных сечений участков и находящегося под действием продольных сил (рис. 1.2а), используя метод сечений, построить эпюру нормальных сил N . Из условия прочности определить диаметры круглых поперечных сечений. Построить эпюры нормальных напряжений и продольных перемещений. Принять материал стержня – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ и модулем продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Дано:

$q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 80 \text{ кН}$; $l_1 = 1 \text{ м}$; $l_2 = 1,8 \text{ м}$; $l_3 = 1,2 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

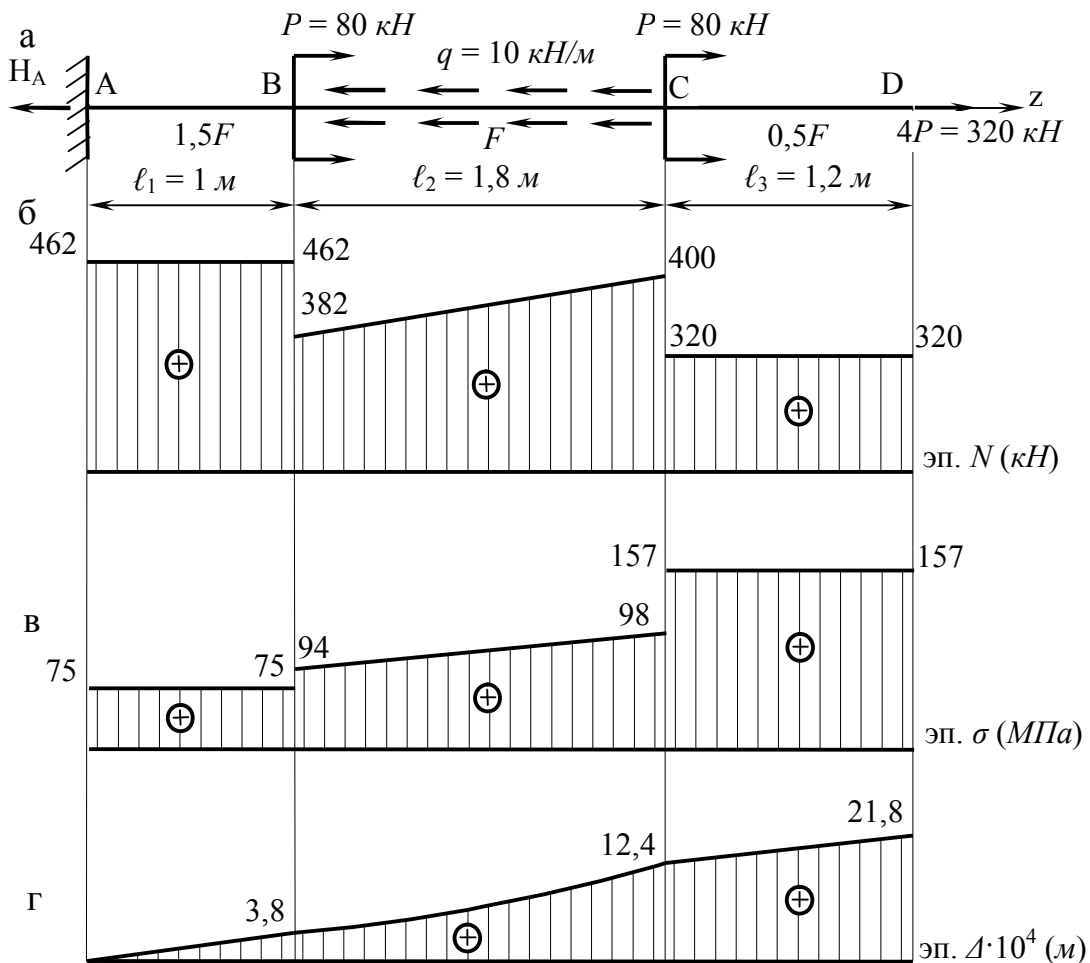


Рис. 1.2

Решение**1. Определение опорной реактивной силы.**

Уравнение равновесия сил, направленных по оси z , имеет вид

$$\begin{aligned}\Sigma z &= 0; \\ -H_A + P - q \cdot \ell_2 + P + 4P &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$H_A = 6P - q \cdot \ell_2 = 6 \cdot 80 - 10 \cdot 1,8 = 462 \text{ кН}.$$

2. Определение внутренних нормальных сил N методом сечений и построение эпюры $N(z)$.

Стержень имеет три участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние силы P . Для обнаружения нормальных сил на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем стержень на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2, z_3 , и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченного стержня, заменяя действие отброшенных частей внутренними нормальными силами N_{AB}, N_{BC}, N_{CD} (рис. 1.3).

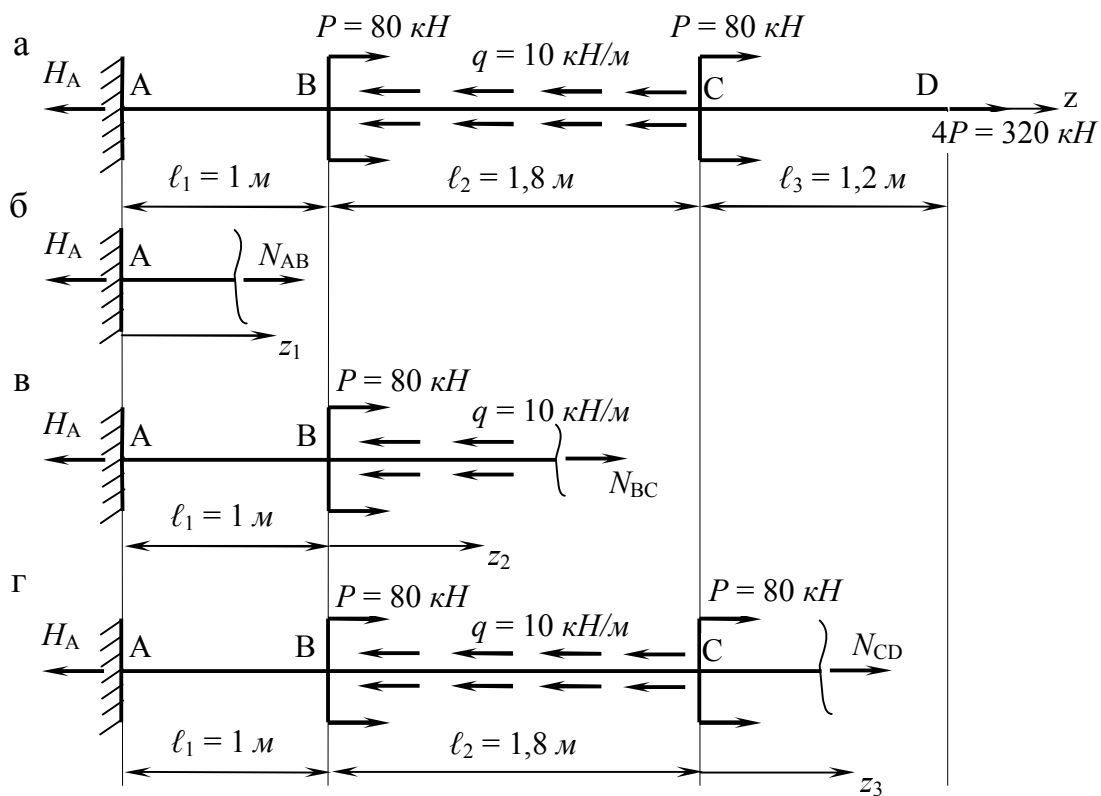


Рис. 1.3

В результате получаем уравнения равновесия:

Участок АВ ($0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$) – рис. 1.3б:

$$N_{AB} = H_A = 462 \text{ кН}.$$

Участок ВС ($0 \leq z_2 \leq 1,8 \text{ м}$) – рис. 1.3в:

$$N_{BC} = H_A - P + q \cdot z_2 = 462 - 80 + 10 \cdot z_2 = 382 + 10 \cdot z_2;$$

$$N_{BC}(0) = 382 \text{ кН}; N_{BC}(1,8) = 382 + 10 \cdot 1,8 = 400 \text{ кН}.$$

Участок CD ($0 \leq z_3 \leq 1,2 \text{ м}$) – рис. 1.3г:

$$N_{CD} = H_A - P + q \cdot \ell_2 - P = 462 - 80 + 10 \cdot 1,8 - 80 = 320 \text{ кН}.$$

Нормальные силы на каждом из участков известны, что позволяет легко построить график-эпюру нормальных сил (см. рис. 1.2б).

3. Определение диаметров сечения бруса

Из условия прочности бруса по нормальным напряжениям находим для каждого рассматриваемого участка отношение N/F .

Участок AB:

$$\frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{462}{1,5F} = \frac{308}{F}.$$

Участок BC:

$$\frac{N_{BC}^{\max}}{F_{BC}} = \frac{400}{F}.$$

Участок CD:

$$\frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{320}{0,5F} = \frac{640}{F}.$$

Максимальное значение N/F получили для участка CD, для которого применим условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{N^{\max}}{F} \leq [\sigma],$$

$$\frac{640}{F} \leq 160 \cdot 10^3,$$

$$\text{откуда } F \geq \frac{640}{160 \cdot 10^3} = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = \text{см}^2.$$

Так как площадь круга $F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$, то $d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 40}{\pi}} = 7,136 \text{ см}.$

Принимаем $d = 7,2 \text{ см} = 72 \text{ мм}.$

Тогда получим $F = \frac{\pi \cdot 7,2^2}{4} = 40,7 \text{ см}^2 = 40,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$

4. Построение эпюры нормальных напряжений.

Вычисляем напряжения в поперечном сечении для каждого участка бруса:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{F_{AB}} = \frac{462}{1,5 \cdot 40,7 \cdot 10^{-4}} = 75 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 75 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{BC}^H = \frac{N_{BC}^H}{F_{BC}} = \frac{382}{40,7 \cdot 10^{-4}} = 94 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 94 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{BC}^K = \frac{N_{BC}^K}{F_{BC}} = \frac{400}{40,7 \cdot 10^{-4}} = 98 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 98 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{F_{CD}} = \frac{320}{0,5 \cdot 40,7 \cdot 10^{-4}} = 157 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 157 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим график-эпюру нормальных напряжений (см. рис. 1.2в).

5. Построение эпюры продольных перемещений.

Для построения эпюры перемещений вычисляем абсолютные удлинения отдельных участков бруса, используя закон Гука:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N dz}{EF} + \alpha \Delta T l,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала; ΔT – изменение температуры; EF – жесткость стержня при растяжении; E – модуль упругости Эйлера – Юнга.

Если N – постоянная величина, то

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha \Delta T l.$$

Участок АВ:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_1}{E \cdot F_{AB}} = \frac{462 \cdot 1}{2 \cdot 10^8 \cdot (1,5 \cdot 40,7 \cdot 10^{-4})} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Участок ВС:

$$\begin{aligned} \Delta l_{BC} &= \int_0^{l_2} \frac{N_{BC}}{E \cdot F_{BC}} dz_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot (40,7 \cdot 10^{-4})} \int_0^{1,8} (382 + 10 \cdot z_2) = \\ &= \frac{10^{-4}}{81,4} \cdot (382 \cdot z_2 + 10 \cdot \frac{z_2^2}{2}) \Big|_0^{1,8} = \\ &= \frac{10^{-4}}{81,4} \cdot (382 \cdot 1,8 + 10 \cdot \frac{1,8^2}{2}) = 8,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Участок CD:

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l_3}{E \cdot F_{CD}} = \frac{320 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^8 \cdot (0,5 \cdot 40,7 \cdot 10^{-4})} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определение перемещений сечений бруса начинаем с неподвижно – закрепленного конца. Сечение А расположено в заделке, оно не может смещаться и его перемещение равно нулю.

$$\Delta_A = 0.$$

$$\Delta_B = \Delta l_{AB} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$\Delta_C = \Delta_B + \Delta l_{BC} = 3,8 \cdot 10^{-4} + 8,6 \cdot 10^{-4} = 12,4 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

$$\Delta_D = \Delta_C + \Delta l_{CD} = 12,4 \cdot 10^{-4} + 9,4 \cdot 10^{-4} = 21,8 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

По полученным значениям строим график-эпюру перемещений (см. рис. 1.2г).

Задача 2. Абсолютно жесткий брус (утолщенные линии, $EF = \infty$) закреплен с помощью шарнирно-неподвижной опоры и деформирующегося стержня с заданной площадью поперечного сечения (рис. 1.4а). Требуется определить величину допускаемой нагрузки P , $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. При найденном значении силы P определить перемещение точки С. Принять модуль продольной упругости материала стержня $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Дано:

$$l_1 = 1 \text{ м}; l_2 = 1,8 \text{ м}; l_3 = 1,2 \text{ м}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; F = 8 \text{ см}^2.$$

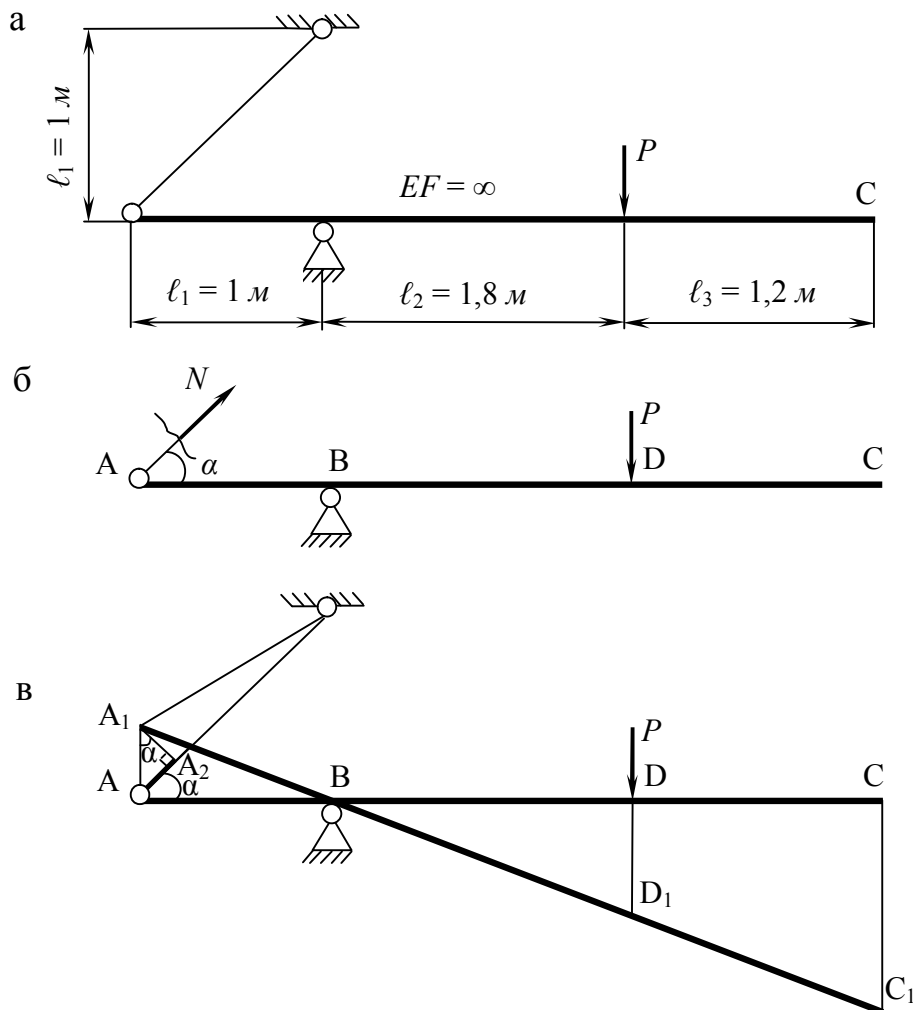


Рис. 1.4

Решение

1. Рассекаем стержень и заменяем его действие на жесткий брус нормальной силой N (смотри рис. 1.4б).

Составляем уравнение равновесия статики:

$$\begin{aligned}\Sigma m_B &= 0; \\ P \cdot \ell_2 + N \cdot \ell_1 \cdot \sin \alpha &= 0,\end{aligned}$$

где $\sin \alpha = \frac{\ell_1}{\sqrt{(\ell_1)^2 + (\ell_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = 0,707$.

Тогда получим:

$$N = \frac{-P \cdot \ell_2}{\ell_1 \cdot \sin \alpha} = \frac{-P \cdot 1,8}{1 \cdot 0,707} = -2,546P. \quad (1.1)$$

2. Из условия прочности находим величину допускаемой силы P .

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma]$$

или

$$\begin{aligned}\frac{2,546P}{F} &\leq 160 \cdot 10^3. \\ [P] &\leq \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^{-4}}{2,546} = 50,2 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Принимаем $[P] = 50 \text{ кН}$. Тогда $N = 2,546P = 2,546 \cdot 50 = 127,3 \text{ кН}$.

3. Находим перемещение точки C .

Рассмотрим деформированное состояние системы (покажем возможное положение системы после деформации). Ввиду малости смещения движение по дуге окружности мы заменяем движением по касательной (рис. 1.4в).

Из подобия треугольников AA_1B и CC_1B получим:

$$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{AB}{CB} = \frac{\ell_1}{\ell_2 + \ell_3} = \frac{1}{1,8 + 1,2} = \frac{1}{3}. \quad (1.2)$$

Рассматривая треугольник AA_1A_2 , получим удлинение стержня:

$$\Delta \ell = AA_2 = AA_1 \cdot \sin \alpha. \quad (1.3)$$

На основании закона Гука определяем удлинение стержня:

$$\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell}{EF} = \frac{127,3 \cdot 1,414}{2 \cdot 10^8 \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,0011 \text{ м}, \quad (1.4)$$

где $\ell = \sqrt{(\ell_1)^2 + (\ell_1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,414 \text{ м}$.

Из (1.2) с учетом (1.3) и (1.4), получаем:

$$\Delta_C = CC_1 = 3AA_1 = \frac{3\Delta \ell}{\sin \alpha} = \frac{3 \cdot 0,0011}{0,707} = 0,0047 \text{ м}.$$

1.2. Кручение вала

Комментарий

Правило знаков при построении эпюр крутящих моментов

Вал нагружен внешними крутящими моментами (рис. 1.5а). Рассечем вал и заменим отсеченную часть внутренним крутящим моментом. Крутящий момент считаем положительным, если его вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть на него со стороны внешней нормали к сечению (рис. 1.5б – при рассмотрении правой части, рис. 1.5в – при рассмотрении левой части). Для построения эпюры крутящих моментов необходимо составить уравнение равновесия отсеченной части вала.

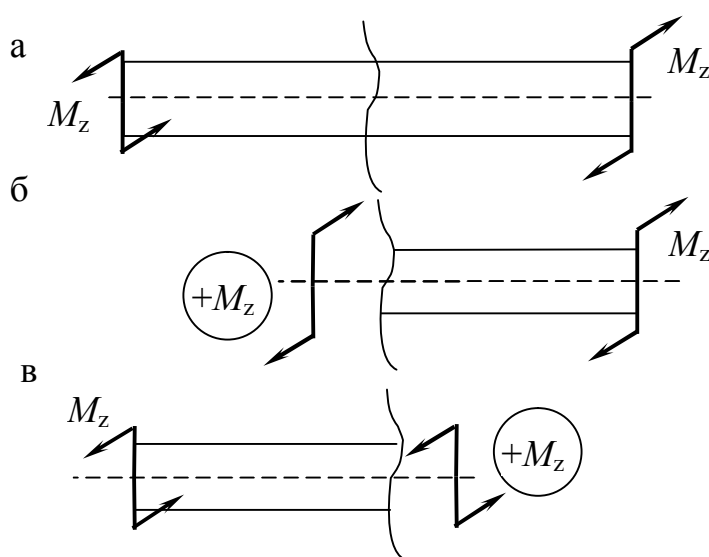


Рис. 1.5

Условие прочности при кручении вала с круглым поперечным сечением:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение; W_p – полярный момент сопротивления сечения.

Для круглого поперечного сечения

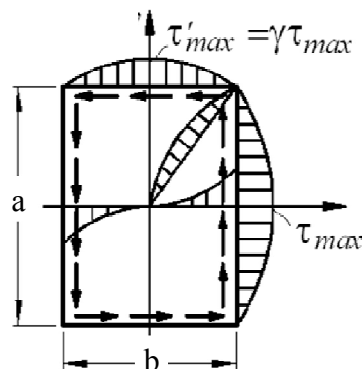
$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Для кольцевого поперечного сечения

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right).$$

Условие прочности при кручении вала с прямоугольным поперечным сечением:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{\alpha \cdot a \cdot b^2} \leq [\tau],$$



где a – большая сторона прямоугольника; b – малая сторона прямоугольника; α – коэффициент, который зависит от отношения сторон a/b .

Угол поворота поперечного сечения стержня:

$$\varphi = \varphi^0 + \int_0^z \frac{M_z dz}{GJ_p},$$

где φ^0 – угол поворота левого торцевого сечения в начале координат, GJ_p – жесткость при кручении; G – модуль сдвига Кулона; J_p – полярный момент инерции сечения.

Если $M_z = const$, то

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{M_z \cdot z}{GJ_p}.$$

Если сечение прямоугольное, то формула принимает вид

$$\varphi = \varphi^0 + \frac{M_z \cdot z}{G \cdot \beta \cdot a \cdot b^3},$$

где β – коэффициент, который зависит от отношения сторон a/b .

Числовые значения коэффициентов α и β приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

a/b	1	1,5	1,75	2	3	5	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,276	0,299	0,313	1/3
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,263	0,299	0,313	1/3
γ	1	0,859	0,820	0,795	0,753	0,743	0,742	0,742

Примеры решения задач

Задача 3. Для стального вала постоянного поперечного сечения, нагруженного внешними крутящими моментами (рис. 1.6а), требуется, используя метод сечений, построить эпюру крутящих моментов, из условия прочности подобрать размеры круглого, кольцевого и прямоугольного поперечных сечений, если $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, $D/d = 1,5$. В опасном сечении построить эпюры касательных напряжений и сравнить массы валов.

Дано:

$\ell_1 = 1 \text{ м}$; $\ell_2 = 1,8 \text{ м}$; $\ell_3 = 1,2 \text{ м}$; $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $[\tau] = 80 \text{ МПа}$; $D/d = 1,5$;
 $a/b = 2$; $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

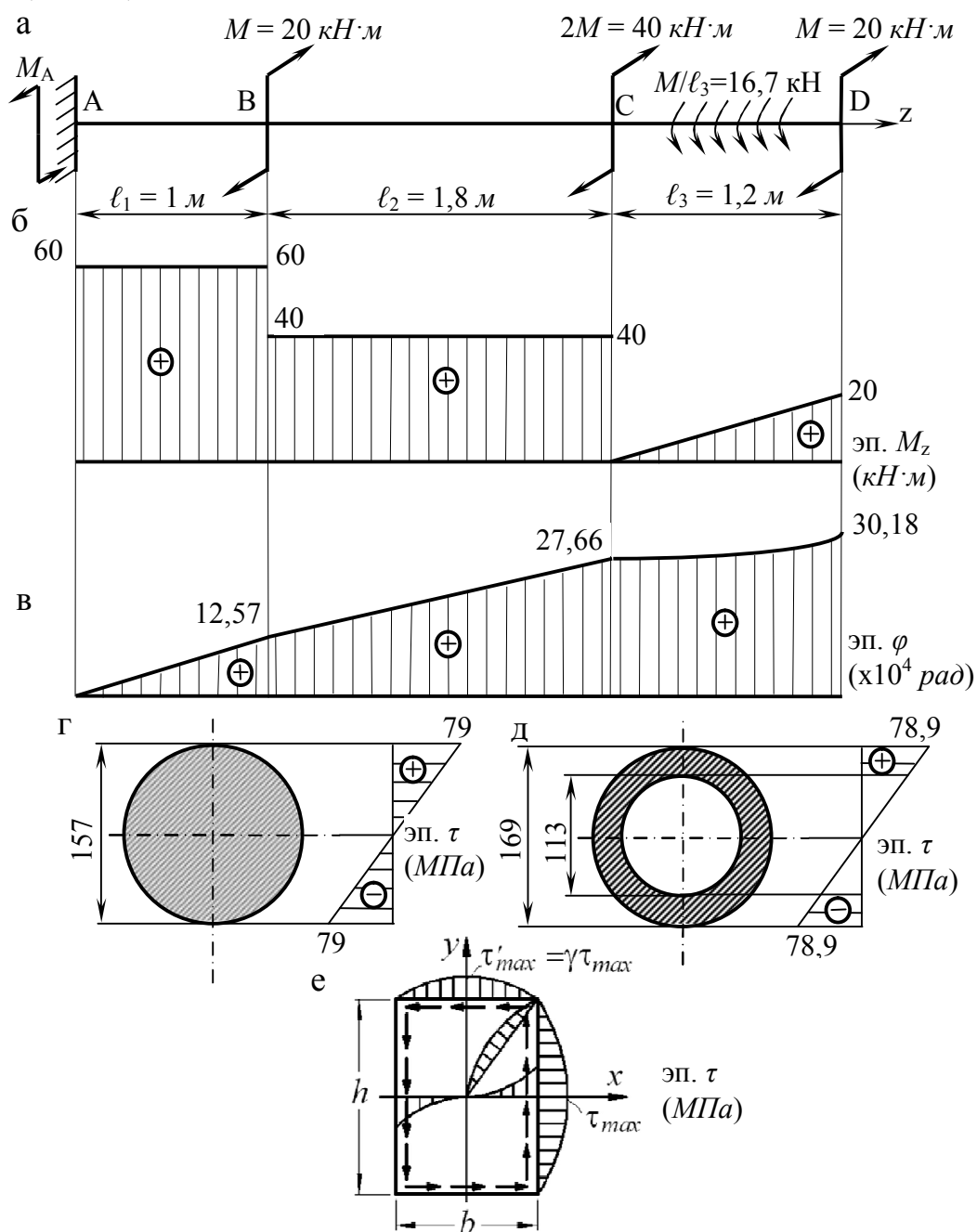


Рис. 1.6

Решение**1. Определение опорного момента.**

Уравнение равновесия крутящих моментов, относительно оси z , имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma M_z &= 0; \\ -M_A + M + 2M - \frac{M}{\ell_3} \cdot \ell_3 + M &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$M_A = 3M = 3 \cdot 20 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Определение внутренних крутящих моментов M_z методом сечений и построение эпюры M_z .

Стержень имеет три участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние моменты M . Для обнаружения крутящих моментов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем стержень на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2, z_3 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченного стержня, заменяя действие отброшенных частей внутренними крутящими моментами M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} (рис. 1.7).

В результате получаем уравнения равновесия

Участок АВ ($0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$) – рис. 1.7б:

$$\Sigma M_z = 0; -M_A + M_{z_1} = 0,$$

откуда $M_{z_1} = M_A = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Участок ВС ($0 \leq z_2 \leq 1,8 \text{ м}$) – рис. 1.7в:

$$\Sigma M_z = 0; -M_A + M + M_{z_2} = 0,$$

откуда $M_{z_2} = M_A - M = 60 - 20 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Участок CD ($0 \leq z_3 \leq 1,2 \text{ м}$) – рис. 1.7г:

$$\Sigma M_z = 0; -M_A + M + 2M - \frac{M}{\ell_3} \cdot z_3 + M_{z_3} = 0,$$

откуда $M_{z_3} = M_A - 3M + \frac{M}{\ell_3} \cdot z_3 = 60 - 3 \cdot 20 + \frac{20}{1,2} \cdot z_3 = \frac{50}{3} z_3,$

$$M_{z_3}(0) = 0. \quad M_{z_3}(1,2) = \frac{50}{3} \cdot 1,2 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Крутящие моменты на каждом из участков известны, что позволяет легко построить график-эпюру крутящих моментов (см. рис. 1.6б).

Максимальный крутящий момент $M_z^{\max} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

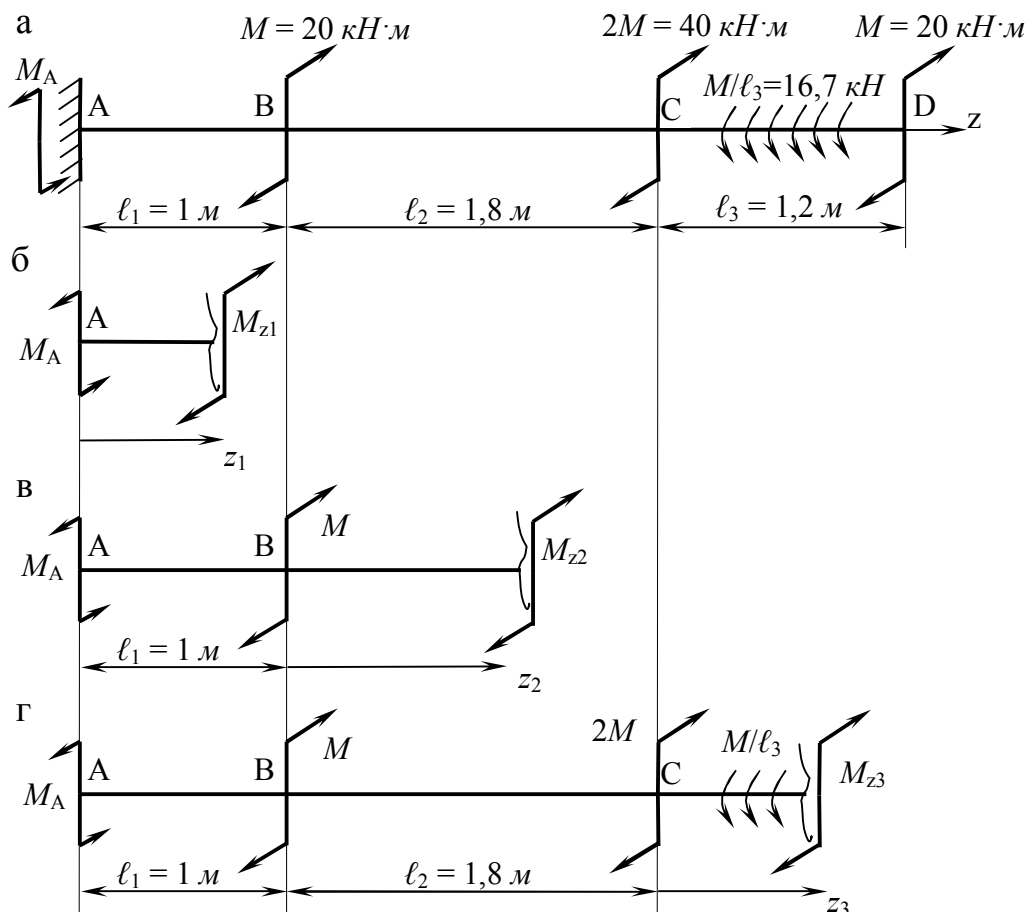


Рис. 1.7

3. Подбор сечения вала из условия прочности

Условие прочности для вала круглого поперечного сечения имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} \leq [\tau] = 80 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

откуда полярный момент сопротивления сечения

$$W_p \geq \frac{M_z^{\max}}{[\tau]} = \frac{60}{80 \cdot 10^3} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Определяем размеры круглого поперечного сечения:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7,5 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,1563 \text{ м}.$$

Принимаем $d = 157 \text{ мм}$.

Определяем размеры кольцевого поперечного сечения:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7,5 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1,5} \right)^4 \right)}}.$$

$$W_p = 0,1682 \text{ м}.$$

Принимаем $D = 169 \text{ мм}$; $d = D/1,5 = 169/1,5 = 113 \text{ мм}$.

Условие прочности для вала прямоугольного поперечного сечения имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{\alpha \cdot a \cdot b^2} \leq [\tau] = 80 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

откуда с учетом, что $a = 2b$, получаем

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{M_z^{\max}}{6,25 \cdot \alpha \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{60}{2 \cdot 0,246 \cdot 80 \cdot 10^3}} = 0,115 \text{ м}.$$

Принимаем $b = 115 \text{ мм}$; $a = 2b = 2 \cdot 115 = 230 \text{ мм}$.

4. Построение эпюры угловых перемещений для вала круглого поперечного сечения ($d = 157 \text{ мм}$)

Угловые перемещения сечений определяются по формуле

$$\varphi^k = \varphi^H + \frac{1}{GJ_p} \int_0^z M_z dz,$$

где J_p – полярный момент инерции,

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (0,157)^4}{32} = 5,96 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

GJ_p – крутильная жесткость вала,

$$GJ_p = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 5,96 \cdot 10^{-5} = 4,772 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Определяем угловые перемещения сечений, начиная с неподвижно закрепленного конца. Сечение А расположено в заделке, оно не может поворачиваться и его угловое перемещение равно 0: $\varphi_A = 0$.

Сечение В:

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{M_{z1} \cdot \ell_1}{GJ_p} = 0 + \frac{60 \cdot 1}{4,772 \cdot 10^3} = 12,57 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Сечение С:

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{z2} \cdot \ell_2}{GJ_p} = 12,57 \cdot 10^{-3} + \frac{40 \cdot 1,8}{4,772 \cdot 10^3} = 27,66 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Сечение D:

$$\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_C + \frac{1}{GJ_p} \int_0^{1,2} M_{z3} dz_3 = 27,66 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4,772 \cdot 10^3} \int_0^{1,2} \left(\frac{50}{3} z_3\right) dz_3 = \\ &= 27,66 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4,772 \cdot 10^3} \left(\frac{50}{6} z_3^2\right) \Big|_0^{1,2} = 27,66 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{4,772 \cdot 10^3} \left(\frac{50}{6} \cdot 1,2^2\right) = \\ &= 30,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад}. \end{aligned}$$

5. Построение эпюр касательных напряжений.

Круглое поперечное сечение:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} = \frac{60}{\pi \cdot 0,157^3 / 16} = 79 \cdot 10^3 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2} = 79 \text{ МПа}.$$

Эпюра приведена на рис. 3.1г.

Кольцевое поперечное сечение:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_p} = \frac{60}{\pi \cdot D^4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1,5}\right)^4\right) / 16} = 78,9 \cdot 10^3 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2} = 78,9 \text{ МПа}.$$

Напряжения на внутреннем кольце сечения:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_z^{\max}}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_z^{\max}}{\pi \cdot D^4 \cdot \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) / 32} \cdot \frac{d}{2} = \\ &= \frac{60}{\pi \cdot 0,169^4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{1,5}\right)^4\right) / 32} \cdot \frac{0,113}{2} = 52,8 \cdot 10^3 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2} = 52,8 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эпюра приведена на рис. 1.6д.

Прямоугольное поперечное сечение:

$$\begin{aligned} \tau_a = \tau_{\max} &= \frac{M_z^{\max}}{\alpha \cdot a \cdot b^2} = \frac{60}{0,246 \cdot 0,115 \cdot 0,23^2} = 40,1 \cdot 10^3 \frac{\kappa\text{H}}{\text{м}^2} = 40,1 \text{ МПа}, \\ \tau_s &= \gamma \tau_{\max} = 0,795 \cdot 40,1 = 32 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эпюра приведена на рис. 1.6е.

6. Сравнение масс валов.

Массы валов круглого и кольцевого сечений соотносятся как площади их поперечных сечений.

$$\text{Площадь круглого сечения } F_{\text{кр}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{кр}}^2}{4}.$$

$$\text{Площадь кольцевого сечения } F_{\text{кол}} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2).$$

$$\text{Площадь прямоугольного сечения } F_{\text{пр}} = a \cdot b.$$

$$\frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{кол}}} = \frac{d_{\text{кр}}^2}{D^2 - d^2} = \frac{0,157^2}{0,169^2 - 0,113^2} = 1,56.$$

Полый вал легче сплошного в 1,56 раза.

$$\frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{пр}}} = \frac{\pi \cdot d_{\text{кр}}^2}{4 \cdot a \cdot b} = \frac{\pi \cdot 0,157^2}{4 \cdot 0,115 \cdot 0,23} = 0,73.$$

Вал круглого поперечного сечения легче вала прямоугольного сечения в 0,73 раза.

1.3. Геометрические характеристики поперечных сечений стержня

Комментарий

Рассмотрим плоскую фигуру произвольной формы, являющуюся поперечным сечением стержня (рис. 1.8).

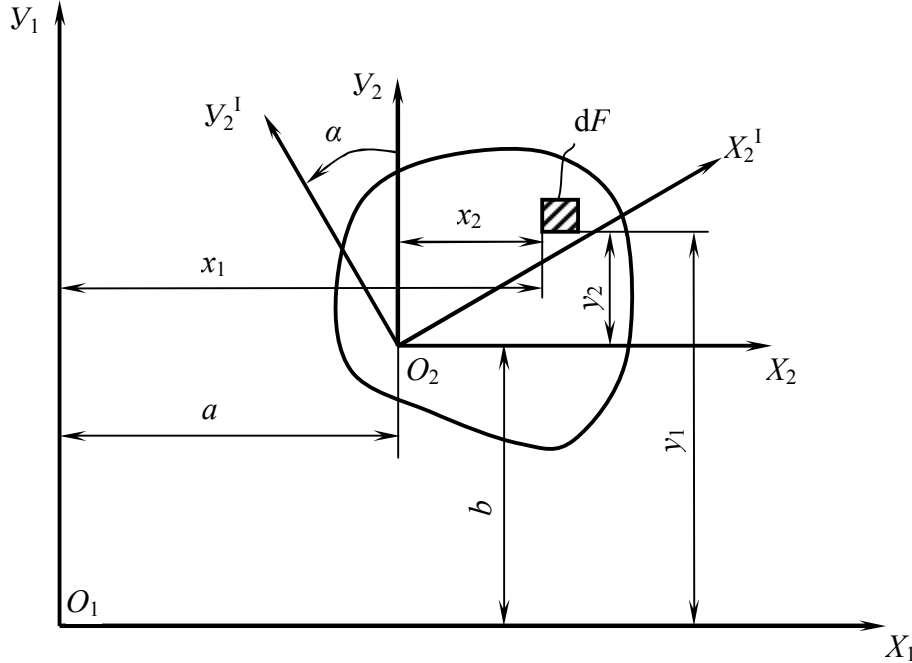


Рис. 1.8

Статический момент инерции:

относительно осей X_2 и Y_2 :

$$S_{x_2} = \int_F y_2 dF, \quad S_{y_2} = \int_F x_2 dF;$$

относительно вспомогательных осей X_1 и Y_1 , параллельных X_2 и Y_2 :

$$S_{x_1} = S_{x_2} + bF, \quad S_{y_1} = S_{y_2} + aF.$$

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. $S_{x_2} = S_{y_2} = 0$.

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести*. Координаты центра тяжести определяются по формуле

$$b = y_c = \frac{S_{x_1}}{F}, \quad a = x_c = \frac{S_{y_1}}{F}.$$

Моменты инерции сечения:

относительно центральных осей:

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_{xy} = \int_F xy dF;$$

относительно вспомогательных осей X_1 и Y_1 , параллельных X_2 и Y_2 :

$$J_{x_1} = J_{x_2} + b^2 F, \quad J_{y_1} = J_{y_2} + a^2 F, \quad J_{x_1 y_1} = J_{x_2 y_2} + ab F.$$

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются *главными осями*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

$$J_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

Направление главных осей характеризуется углами $\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$, которые определяются по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Главные оси обозначаются цифрами 1 и 2, а главные моменты инерции $J_1 = J_{\max}, J_2 = J_{\min}$. Центробежный момент инерции относительно главных осей равен нулю. Любая ось геометрической симметрии является главной.

Полярный момент инерции:

$$J_x + J_y = \int_F (x^2 + y^2) dF = J_p.$$

Радиусами инерции сечения называют величины

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}.$$

Моменты сопротивления сечения относительно осей x и y – это величины

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}.$$

Все расчетные формулы сопротивления материалов выводятся по отношению к главным центральным осям инерции поперечного сечения стержня.

Примеры решения задач

Задача 4. Для заданных поперечных сечений (рис. 1.9) определить осевые моменты инерции J_x и J_y относительно центральных осей.

Решение

1. Рассмотрим сечение, представленное на рис. 1.9а.

Оси X и Y являются осями геометрической симметрии, следовательно, эти оси являются центральными и главными. Центр тяжести сечения находится на пересечении этих осей.

Заданное сечение состоит из двух простых геометрических фигур: прямоугольника и круга.

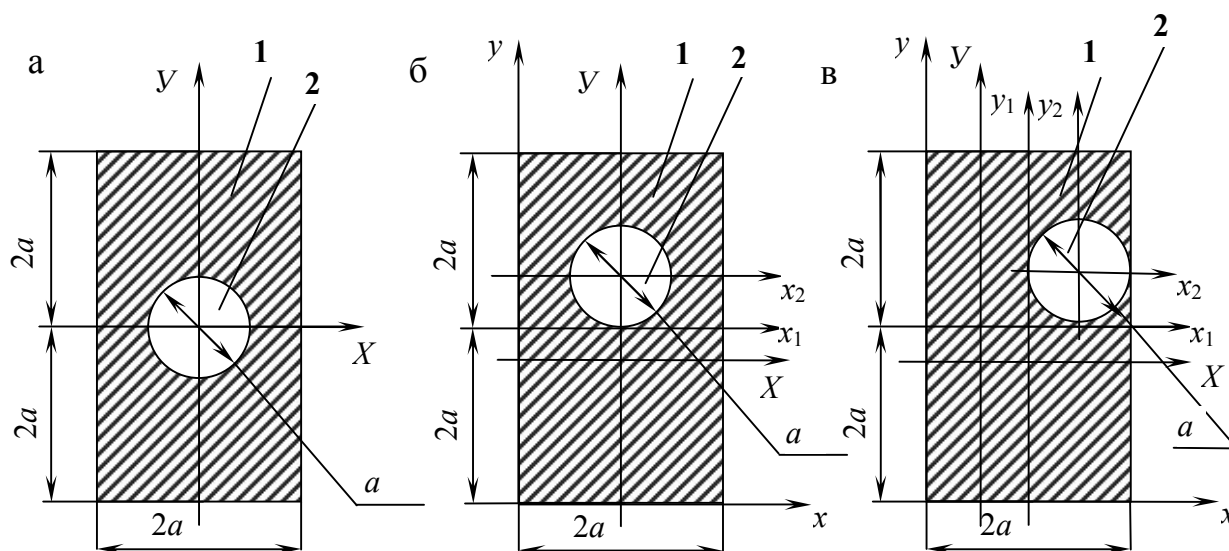


Рис. 1.9

Рассмотрим эти фигуры по отдельности и определим для каждой моменты инерции относительно их центра тяжести.

Прямоугольник:

$$J_{x_1} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{2a \cdot (4a)^3}{12} = 10,67a^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{4a \cdot (2a)^3}{12} = 2,67a^4.$$

Круг:

$$J_{x_2} = J_{y_2} = \frac{\pi \cdot a^4}{64} = \frac{\pi \cdot a^4}{64} = 0,049a^4.$$

Определяем моменты инерции всего сечения:

$$J_x = J_{x_1} - J_{x_2} = 10,67a^4 - 0,049a^4 = 10,621a^4;$$

$$J_y = J_{y_1} - J_{y_2} = 2,67a^4 - 0,049a^4 = 2,621a^4.$$

2. Рассмотрим сечение, представленное на рис. 1.9б.

Ось Y является осью геометрической симметрии, следовательно, она является центральной и главной.

Определим положение центра тяжести данного сечения.

Для этого выбираем вспомогательные оси x и y таким образом, чтобы все сечение находилось в правом верхнем квадрате.

Координата центра тяжести X_c относительно вспомогательных осей – $X_c = 2a$ (сечение симметрично относительно оси Y).

Координата центра тяжести Y_c относительно вспомогательных осей определяется по формуле

$$y_c = \frac{\Sigma S_x}{F} = \frac{y_{c_1} \cdot F_1 - y_{c_2} \cdot F_2}{F_1 - F_2} = \frac{2a \cdot 8a^2 - 2,5a \cdot (\pi a^2 / 4)}{8a^2 - (\pi a^2 / 4)} = 1,95a,$$

где F_1 – площадь прямоугольника, $F_1 = 2a \cdot 4a = 8a^2$;

F_2 – площадь круга, $F_2 = \pi a^2 / 4$.

Определяем моменты инерции всего сечения:

$$J_x = J_{x_1} + b_1^2 \cdot F_1 - (J_{x_2} + b_2^2 \cdot F_2),$$

где $b_1 = y_c - y_1 = 2a - 1,95a = 0,05a$;

$b_2 = y_c - y_2 = 2,5a - 1,95a = 0,55a$.

$$J_x = 10,67a^4 + (0,05a)^2 \cdot 8a^2 - (0,049a^4 + (0,55a)^2 \cdot \frac{\pi a^2}{4}) = 10,4a^4.$$

$$J_y = J_{y_1} - J_{y_2} = 2,67a^4 - 0,049a^4 = 2,621a^4.$$

3. Рассмотрим сечение, представленное на рис. 1.9в.

Определим положение центра тяжести данного сечения.

Для этого выбираем вспомогательные оси x и y таким образом, чтобы все сечение находилось в правом верхнем квадрате.

Координата центра тяжести y_c относительно вспомогательных осей – $y_c = 1,95a$ (см. пункт 2).

Координата центра тяжести x_c относительно вспомогательных осей определяется по формуле

$$x_c = \frac{\Sigma S_y}{F} = \frac{x_{c_1} \cdot F_1 - x_{c_2} \cdot F_2}{F_1 - F_2} = \frac{a \cdot 8a^2 - 1,5a \cdot (\pi a^2 / 4)}{8a^2 - (\pi a^2 / 4)} = 0,95a.$$

Определяем моменты инерции всего сечения:

$$J_x = J_{x_1} + b_1^2 \cdot F_1 - (J_{x_2} + b_2^2 \cdot F_2),$$

где $b_1 = y_c - y_1 = 2a - 1,95a = 0,05a$;

$b_2 = y_c - y_2 = 2,5a - 1,95a = 0,55a$.

$$J_x = 10,67a^4 + (0,05a)^2 \cdot 8a^2 - (0,049a^4 + (0,55a)^2 \cdot \frac{\pi a^2}{4}) = 10,4a^4.$$

$$J_y = J_{y_1} + a_1^2 \cdot F_1 - (J_{y_2} + a_2^2 \cdot F_2),$$

где $a_1 = x_c - x_1 = a - 0,95a = 0,05a$;

$a_2 = x_c - x_2 = 1,5a - 0,95a = 0,55a$.

$$J_y = 2,67a^4 + (0,05a)^2 \cdot 8a^2 - (0,049a^4 + (0,55a)^2 \cdot \frac{\pi a^2}{4}) = 2,4a^4.$$

Задача 5. Для заданных поперечных сечений (рис. 1.10) определить осевые моменты инерции J_x и J_y относительно центральных осей.

Решение

1. Рассмотрим сечение, представленное на рис. 1.10а.

Оси X и Y являются осями геометрической симметрии, следовательно, эти оси являются центральными и главными. Центр тяжести сечения находится на пересечении этих осей.

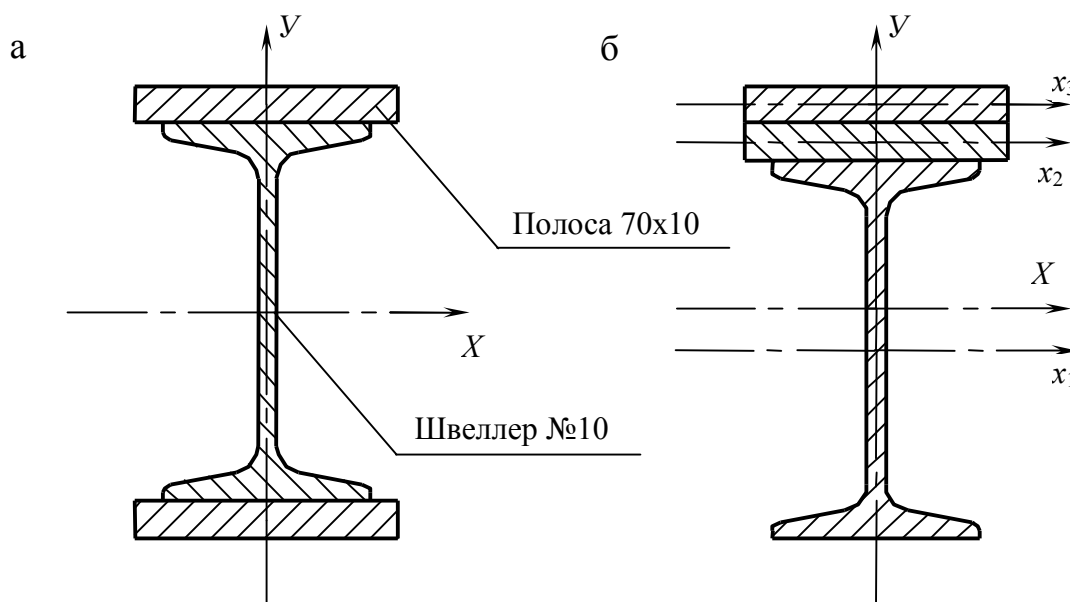


Рис. 1.10

Заданное сечение состоит из трех простых геометрических фигур: швеллера и двух прямоугольников.

Рассмотрим эти фигуры по отдельности и определим для каждой моменты инерции относительно их центра тяжести.

Швеллер № 10

Из сортамента ГОСТ 8240-97 выписываем геометрические характеристики: $F_1 = 12 \text{ см}^2$; $J_{x1} = 198 \text{ см}^4$; $J_{y1} = 17,9 \text{ см}^4$.

Прямоугольник

$$F_2 = F_3 = b \cdot h = 7 \cdot 1 = 7 \text{ см}^2;$$

$$J_{x2} = J_{x3} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{7 \cdot (1)^3}{12} = 0,58 \text{ см}^4;$$

$$J_{y2} = J_{y3} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{1 \cdot (7)^3}{12} = 28,58 \text{ см}^4.$$

Определяем моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей:

$$J_x = J_{x1} + 2 \cdot (J_{x2} + b^2 \cdot F) = 198 + 2 \cdot (0,58 + 5,5^2 \cdot 7) = 623 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y1} + 2J_{y2} = 17,9 + 2 \cdot 28,58 = 75,06 \text{ см}^4.$$

2. Рассмотрим сечение, представленное на рис. 1.10б.

Ось Y является осью геометрической симметрии, следовательно, она является центральной и главной.

Определим положение центра тяжести данного сечения.

Для этого выбираем вспомогательные оси x и y таким образом, чтобы все сечение находилось в правом верхнем квадрате.

Координата центра тяжести X_c относительно вспомогательных осей – $X_c = 6$ см (сечение симметрично относительно оси Y).

Координата центра тяжести Y_c относительно вспомогательных осей определяется по формуле

$$Y_c = \frac{\sum S x}{F} = \frac{y_{c1} \cdot F_1 + y_{c2} \cdot F_2 + y_{c3} \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{5 \cdot 12 + 10,5 \cdot 7 + 11,5 \cdot 7}{12 + 7 + 7} = 8,23 \text{ см}.$$

Определяем моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей:

$$J_x = J_{x1} + b_1^2 \cdot F_1 + J_{x2} + b_2^2 \cdot F_2 + J_{x3} + b_3^2 \cdot F_3 = \\ = 198 + 3,23^2 \cdot 12 + 0,58 + 2,27^2 \cdot 7 + 0,58 + 3,27^2 \cdot 7 = 435,3 \text{ см}^4,$$

где $b_1 = Y_c - y_1 = 8,23 - 5 = 3,23$ см;

$$b_2 = Y_c - y_2 = 8,23 - 10,5 = 2,27 \text{ см};$$

$$b_3 = Y_c - y_3 = 8,23 - 11,5 = 3,27 \text{ см}.$$

$$J_y = J_{y1} + 2J_{y2} = 17,9 + 2 \cdot 28,58 = 75,06 \text{ см}^4.$$

Задача 6. Для заданного поперечного сечения (рис. 1.11) определить моменты инерции относительно главных центральных осей.

Дано:

уголок 80x80x8, швеллер №36.

Решение

Сечение, представленное на рис. 1.11 состоит из трех простых геометрических фигур: уголка 80 x 80 x 8 и двух швеллеров № 36.

Из сортамента выписываем геометрические характеристики этих фигур.

Фигура 1 – уголок 80 x 80 x 8. Площадь – $F_1 = 12,3 \text{ см}^2$; осевые моменты инерции – $J_{x1} = J_{y2} = 73,4 \text{ см}^4$; моменты инерции относительно главных осей – $J_{x0} = 116 \text{ см}^4$, $J_{y0} = 30,3 \text{ см}^4$; центробежный момент инерции относительно главных осей – $J_{x0y0} = 0$; центробежный момент инерции относительно осей x_1 и y_1

$$J_{x1y1} = J_{x0y0} \cdot \cos \beta + \frac{J_{x0} - J_{y0}}{2} \cdot \sin(2\beta) = 0 + \frac{116 - 30,3}{2} \cdot \sin(-90) = -42,85 \text{ см}^4.$$

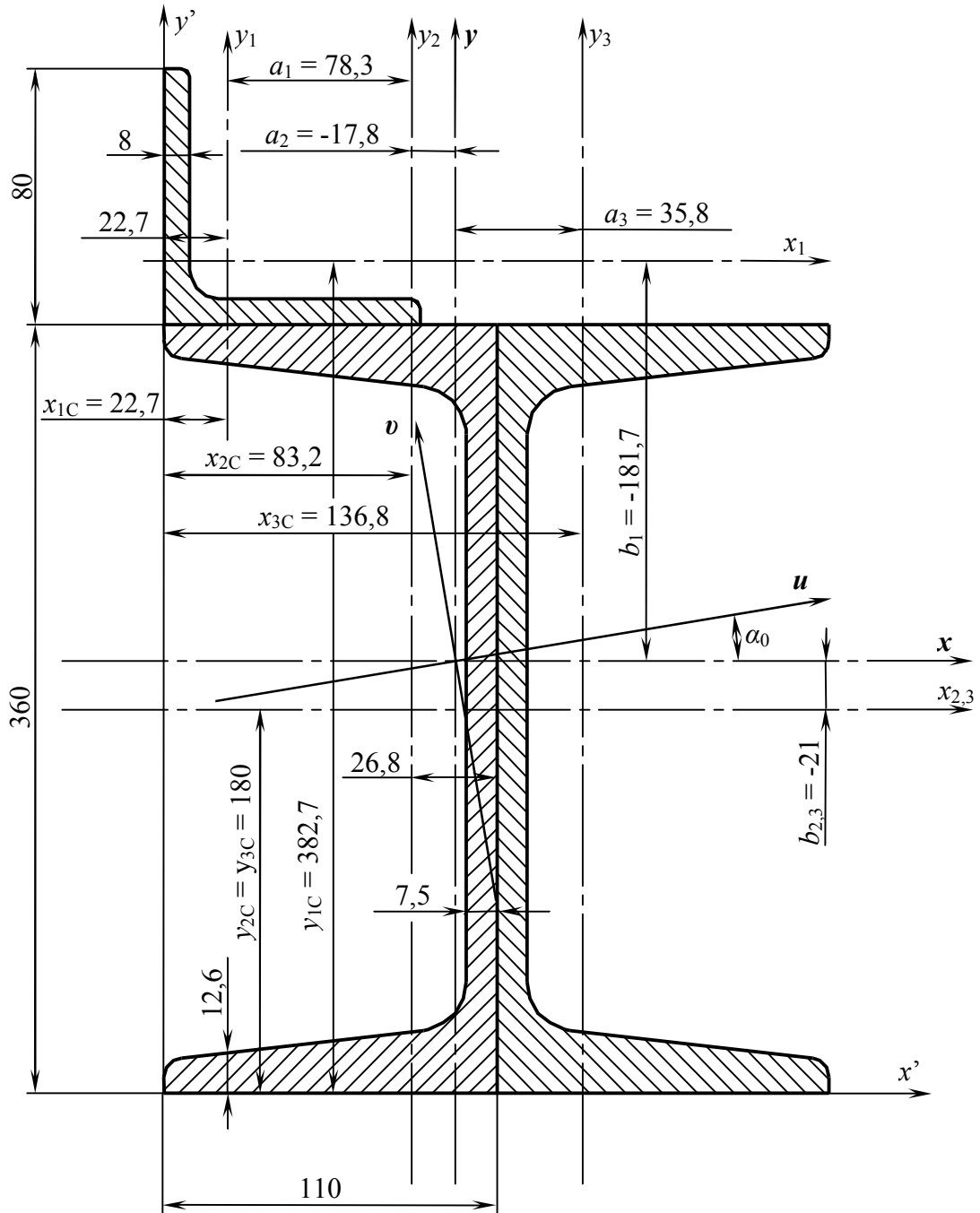


Рис. 1.11

Фигура 2, 3 – швеллер № 36. Площадь – $F_2 = F_3 = 53,4 \text{ см}^2$; осевые моменты инерции – $J_{x_2} = J_{x_3} = 10820 \text{ см}^4$, $J_{y_2} = J_{y_3} = 513 \text{ см}^4$; центробежный момент инерции относительно осей x_2 и y_2 или x_3 и y_3 $J_{x_2y_2} = J_{x_3y_3} = 0$.

1. Определяем центр тяжести сечения.

Для этого выбираем вспомогательную систему координат. При этом за начало координат выбирается крайняя левая нижняя точка, таким образом, чтобы все сечение находилось в правом верхнем квадрате. На

рис. 1.11 покажем координаты центров тяжести фигур относительно вспомогательной системы координат.

$$X_c = \frac{\sum S y}{F} = \frac{x_{c1} \cdot F_1 + x_{c2} \cdot F_2 + x_{c3} \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{2,27 \cdot 12,3 + 8,32 \cdot 53,4 + 13,68 \cdot 53,4}{12,3 + 53,4 + 53,4},$$

$$X_c = 10,1 \text{ см.}$$

$$Y_c = \frac{\sum S x}{F} = \frac{y_{c1} \cdot F_1 + y_{c2} \cdot F_2 + y_{c3} \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{38,27 \cdot 12,3 + 18 \cdot 53,4 + 18 \cdot 53,4}{12,3 + 53,4 + 53,4},$$

$$Y_c = 20,1 \text{ см.}$$

На рисунке покажем координаты центра тяжести фигуры и проведем центральные оси параллельно вспомогательным осям.

2. Определяем осевые и центробежные моменты инерции.

Для определения осевых и центробежных моментов инерции относительно центральных осей X и Y воспользуемся формулами при параллельном переносе осей:

$$J_x = J_{x1} + b_1^2 \cdot F_1 + J_{x2} + b_2^2 \cdot F_2 + J_{x3} + b_3^2 \cdot F_3,$$

где $b_1 = Y_c - y_{1c} = 20,1 - 38,27 = -18,17 \text{ см};$

$$b_2 = Y_c - y_{2c} = 20,1 - 18 = 2,1 \text{ см};$$

$$b_3 = Y_c - y_{3c} = 20,1 - 18 = 2,1 \text{ см.}$$

$$J_x = 73,4 + 18,17^2 \cdot 12,3 + 2 \cdot (10\,820 + 2,1^2 \cdot 53,4) = 26\,245 \text{ см}^4,$$

$$J_y = J_{y1} + a_1^2 \cdot F_1 + J_{y2} + a_2^2 \cdot F_2 + J_{y3} + a_3^2 \cdot F_3,$$

где $a_1 = X_c - x_{1c} = 10,1 - 2,27 = 7,83 \text{ см};$

$$a_2 = X_c - x_{2c} = 10,1 - 8,32 = 1,78 \text{ см};$$

$$a_3 = X_c - x_{3c} = 10,1 - 13,68 = -3,58 \text{ см.}$$

$$J_x = 73,4 + 7,83^2 \cdot 12,3 + 513 + 1,78^2 \cdot 53,4 + 513 + 3,58^2 \cdot 53,4 = 2707 \text{ см}^4.$$

$$J_{xy} = J_{x1y1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 + J_{x2y2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 + J_{x3y3} + a_3 \cdot b_3 \cdot F_3.$$

$$J_{xy} = -42,85 + 7,83 \cdot (-18,17) \cdot 12,3 + 0 + 1,78 \cdot 2,1 \cdot 53,4 + 0 + (-3,58) \cdot 2,1 \cdot 53,4$$

$$J_{xy} = -1995 \text{ см}^4.$$

3. Определяем положение главных центральных осей.

Для определения положения главных центральных осей необходимо повернуть оси X и Y на некий угол α , чтобы они стали главными:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot (-1995)}{2707 - 26245} = 0,17,$$

откуда $\alpha = 4,8^\circ$.

4. Определяем значения главных центральных моментов инерции.

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{26245 + 2707}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{26245 - 2707}{2}\right)^2 + (-1995)^2}.$$

$$J_u = J_{\max} = 14\,476 + 11\,937 = 26\,413 \text{ см}^4.$$

$$J_v = J_{\min} = 14\,476 - 11\,937 = 2\,539 \text{ см}^4.$$

1.4. Изгиб стержневых систем

Комментарий

Правило знаков при построении эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов

На балку действуют внешние нагрузки (сосредоточенные силы, изгибающий момент, распределенная нагрузка), которые вызывают ее изгиб (рис. 1.12а). Если рассечь балку и заменить отсеченную часть внутренними силовыми факторами (перерезывающей силой Q и изгибающим моментом M), то их положительное направление будет:

для перерезывающей силы Q – при вращении отсеченной части по часовой стрелке (рис. 1.12б – при рассмотрении правой части, рис. 1.12в – при рассмотрении левой части);

для изгибающего момента M – при сжатии верхних волокон отсеченной части (рис. 1.12б – при рассмотрении правой части, рис. 1.12в – при рассмотрении левой части).

Для построения эпюр перерезывающих сил и изгибающих моментов необходимо составить уравнения равновесия отсеченной части балки.

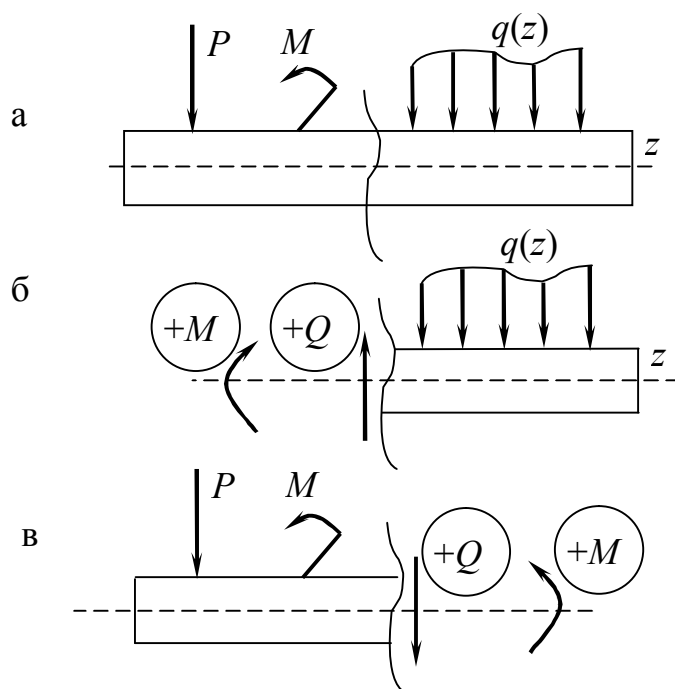


Рис. 1.12

Дифференциальные уравнения равновесия (зависимости)
Д. Журавского

$$\frac{dN}{dz} = -q_z, \quad \frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

Зависимости используются для контроля правильности построения эпюр:

1) на незагруженном участке балки ($q_z = 0, q_y = 0$) нормальная и поперечная силы постоянны; изгибающий момент – прямая линия, возрастающая с ростом z , если угловой коэффициент – сила $Q_y > 0$, и убывающая, если $Q_y < 0$. В этом случае следует

$$N = \text{const}, \quad Q_y = \text{const}, \quad M_x = Q_y z + C,$$

где C – постоянная интегрирования;

2) на равномерно загруженном участке ($q_z = \text{const}, q_y = \text{const}$) эпюры N, Q_y – прямые линии, возрастающие с ростом z , если $q_z < 0, q_y < 0$, и убывающие, если $q_z > 0, q_y > 0$. Эпюра моментов – квадратичная парабола, принимающая экстремальное значение (*max* либо *min*) в сечении, где $Q_y = 0$, и обращенная выпуклостью к стрелкам распределенной нагрузки q_y (по правилу зонтика и дождика). Тогда получаем

$$N = -q_z z + C_1, \quad Q_y = -q_y z + C_2, \quad M_x = -\frac{q_y z^2}{2} + C_2 z + C_3.$$

Условие экстремума имеет вид

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = -q_y z_0 + C_2 = 0,$$

откуда находим координату z_0 соответствующего сечения. Знак в

производной $\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y$ определяет кривизну графика эпюры изгибающих моментов.

Условие прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где M_x^{\max} – максимальный изгибающий момент; W_x – момент сопротивления сечения.

Для круглого поперечного сечения

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Для прямоугольного поперечного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6},$$

b, h – ширина и высота поперечного сечения соответственно.

Условие прочности балки по касательным напряжениям

Для проверки прочности балки по касательным напряжениям, используем формулу Журавского:

$$\tau^{\max} = \frac{Q^{\max} \cdot S^{\max}}{J_x \cdot b} \leq [\tau],$$

где Q^{\max} – максимальное значение перерезывающей силы; S^{\max} – максимальный статический момент инерции сечения, J_x – момент инерции сечения, b – ширина сечения.

Для балки прямоугольного сечения формула принимает вид

$$\tau^{\max} = \frac{3 \cdot Q^{\max}}{2 \cdot h \cdot b}.$$

Примеры решения задач

Задача 7. Для балки (рис. 1.13), используя метод сечений, построить эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающих моментов M_x . Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры круглого поперечного сечения, если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$. В опасном сечении построить эпюру нормальных напряжений.

Дано:

$q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 80 \text{ кН}$; $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $l_1 = 1 \text{ м}$; $l_2 = 1,8 \text{ м}$; $l_3 = 1,2 \text{ м}$;
 $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

Решение

1. Определение опорных реакций

Для определения реакций отбрасываем внешние связи и заменяем их действие внешними силами (рис. 1.13б). Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma Z = 0; \quad H_A = 0,$$

$$\Sigma m_A = 0,$$

$$R_B \cdot (l_2 + l_3) - P \cdot l_1 - q \cdot l_3 \cdot \left(\frac{l_3}{2} + l_2\right) + M = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{P \cdot l_1 - q \cdot l_3 \cdot (0,6 + 1,8) - M}{(1,2 + 1,8)} = \frac{80 \cdot 1 - 10 \cdot 1,2 \cdot 2,4 - 20}{3} = 29,6 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_B = 0;$$

$$-V_A \cdot (\ell_2 + \ell_3) - P \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + q \cdot \ell_3 \cdot \frac{\ell_3}{2} + M = 0,$$

откуда

$$V_A = \frac{-P \cdot (1 + 1,8 + 1,2) + q \cdot 1,2 \cdot 0,6 + M}{(1,2 + 1,8)} = \frac{-80 \cdot 4 + 10 \cdot 1,2 \cdot 0,6 + 20}{3},$$

$$V_A = -97,6 \text{ кН}.$$

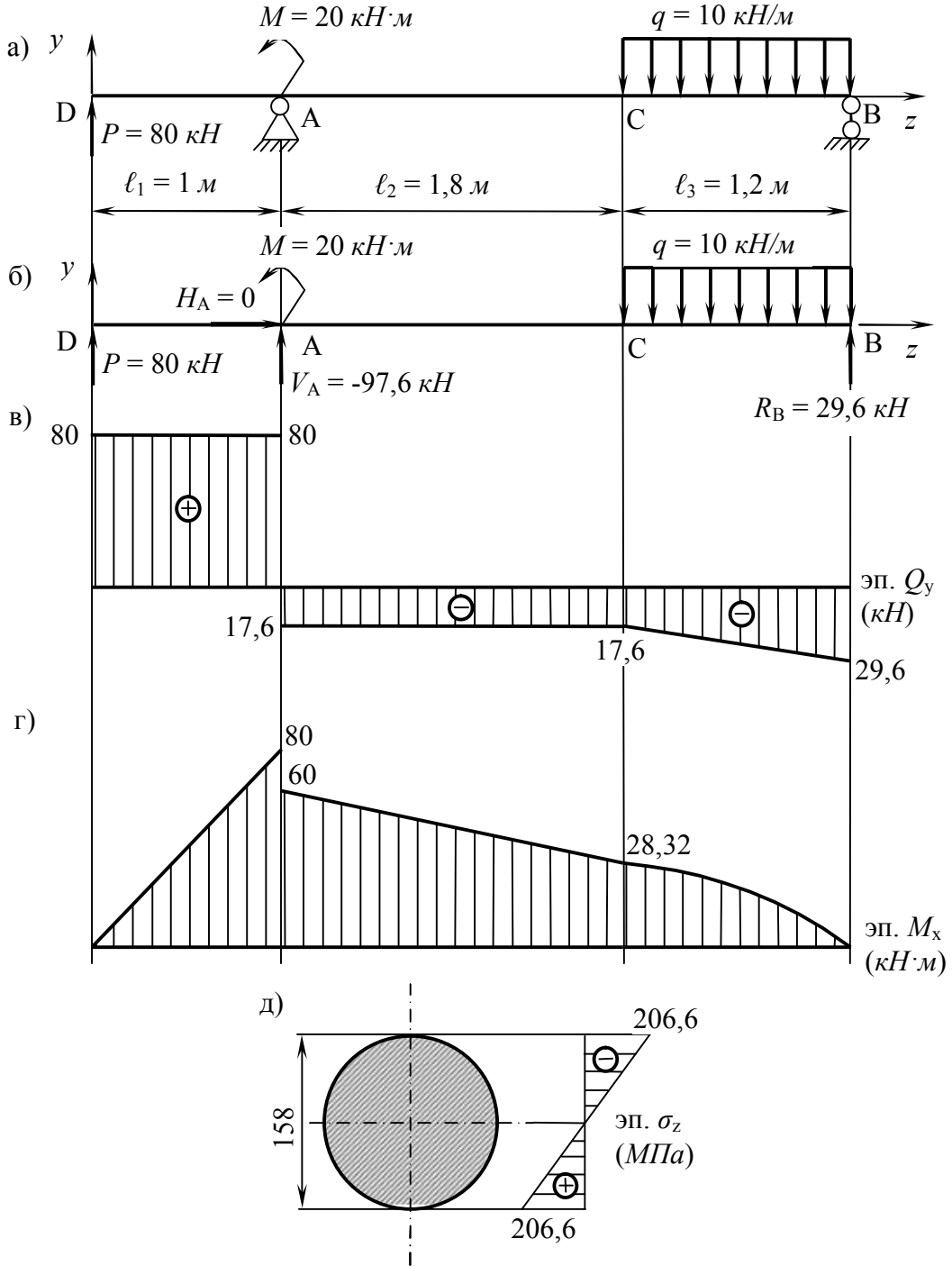


Рис. 1.13

Проверка:

$$\begin{aligned}\Sigma Y &= 0; \\ V_A + R_B - q \cdot \ell_3 + P &= 0, \\ -97,6 + 29,6 - 10 \cdot 1,2 + 80 &= 0.\end{aligned}$$

2. Построение эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающего момента M_x .

Балка имеет три участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, изгибающие моменты или имеет место начало или окончание распределенной нагрузки. Для обнаружения внутренних силовых факторов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем балку на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2, z_3 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченной балки, заменяя действие отброшенных частей перерезывающей силой и изгибающим моментом (рис. 1.14).

В результате получаем уравнения равновесия

Участок АВ ($0 \leq z_1 \leq 1$ м) – рис. 1.14б:

$$\begin{aligned}\Sigma y &= 0; Q_1 = P = 80 \text{ кН.} \\ \Sigma m &= 0; M_1 = P \cdot z_1 = 80 \cdot z_1. \\ M_1(0) &= 0; M_1(1) = 80 \cdot 1 = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Участок ВС ($0 \leq z_2 \leq 1,8$ м) – рис. 1.14в:

$$\begin{aligned}\Sigma y &= 0; Q_2 = P + V_A = 80 + (-97,6) = -17,6 \text{ кН.} \\ \Sigma m &= 0; M_2 = P \cdot (\ell_1 + z_2) - M + V_A \cdot z_2 = 80 \cdot (1 + z_2) - 20 + (-97,6) \cdot z_2. \\ M_2(0) &= 80 \cdot 1 - 20 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_2(1,8) &= 80 \cdot (1 + 1,8) - 20 + (-97,6) \cdot 1,8 = 28,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Участок CD ($0 \leq z_3 \leq 1,2$ м) – рис. 1.14г:

$$\begin{aligned}\Sigma y &= 0; Q_3 = -R_B + q \cdot z_3 = -29,6 + 10 \cdot z_3. \\ Q_3(0) &= -29,6 \text{ кН}; Q_3(1,2) = -29,6 + 10 \cdot 1,2 = -17,6 \text{ кН.} \\ \Sigma m &= 0; M_3 = R_B \cdot z_3 - \frac{q \cdot z_3^2}{2} = 29,6 \cdot z_3 - 5 \cdot z_3^2. \\ M_3(0) &= 0; M_3(1,2) = 29,6 \cdot 1,2 - 5 \cdot 1,2^2 = 28,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Перерезывающие силы и изгибающие моменты на каждом из участков известны, что позволяет легко построить графики-эпюры (рис. 1.13б и 1.13в). При этом эпюру изгибающих моментов строим на сжатых волокнах. При составлении уравнений равновесия на каждом из участков мы предположили, что сжатыми будут верхние волокна. Соответственно, если полученные числовые значения положительны, их откладываем вверх, в противном случае – вниз.

3. Подбор круглого поперечного сечения.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\max}}{W_x} \leq [\sigma] = 21 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

где $M^{\max} = 80 \text{ кН}\cdot\text{м} = 8000 \text{ кН}\cdot\text{см}$;

W_x – момент сопротивления сечения. Для круглого поперечного сечения,

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Откуда диаметр сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M^{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 8000}{\pi \cdot 21}} = 15,714 \text{ см}.$$

Принимаем $d = 158 \text{ мм}$.

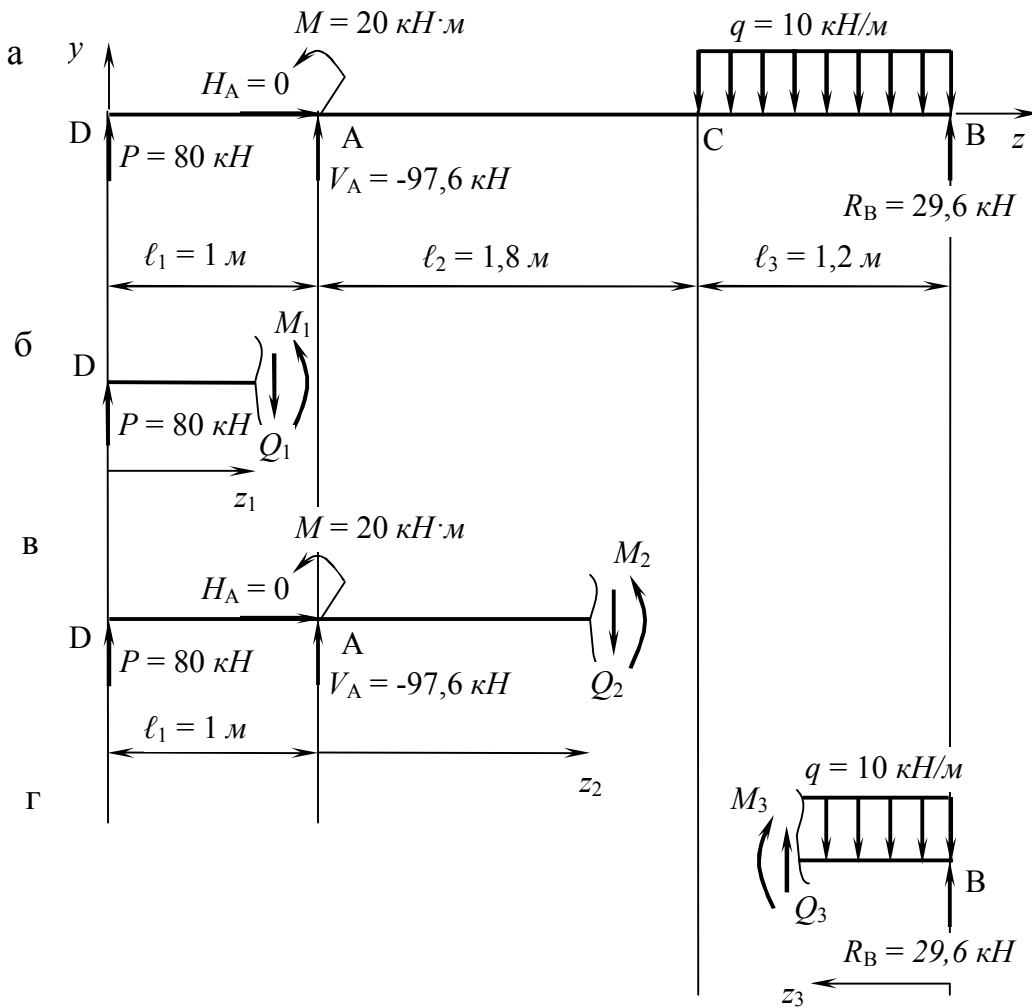


Рис. 1.14

При найденном диаметре вычислим максимальные нормальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\max}}{W_x} = \frac{M^{\max} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{80 \cdot 32}{\pi \cdot (0,158)^3} = 206,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2} = 206,6 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений для найденного круглого сечения приведена на рис. 1.13д.

Задача 8. Для балки (рис. 1.15) построить эпюры внутренних усилий Q_y и M_x , используя метод сечений, и проверить правильность их построения с помощью правил Журавского. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать поперечные сечения двух видов: 1 – прямоугольное с отношением сторон $h/b = 2$; 2 – двутавровое.

Проверить прочность балки прямоугольного поперечного сечения по касательным напряжениям, используя формулу Журавского. Принять $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$, $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

Дано:

$$q = 50 \text{ кН/м}; M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}, \ell_1 = 0,5 \text{ м}; \ell_2 = 1,5 \text{ м}; \ell_3 = 1 \text{ м}; [\sigma] = 200 \text{ МПа}; [\tau] = 80 \text{ МПа}, h/b = 2.$$

Решение

1. Определение опорных реакций

Для определения реакций, отбрасываем внешние связи и связь в шарнире С и заменяем их действие внешними силами (рис. 1.15б). Составляем уравнения равновесия (рассматриваем правую часть, участок СВ):

$$\Sigma z = 0; H_C = 0.$$

$$\Sigma m_C = 0; R_B \cdot \ell_3 + M = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{-M}{\ell_3} = \frac{-30}{1} = -30 \text{ кН}.$$

Рассмотрим всю систему целиком, при этом связь в шарнире сохраняем $\Sigma m_A = 0$;

$$R_B \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) + M + q \cdot \ell_2 \cdot \left(\frac{\ell_2}{2} + \ell_1\right) - q \cdot \ell_1 \cdot \frac{\ell_1}{2} - M_A = 0,$$

откуда

$$M_A = -R_B \cdot (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) - M - q \cdot \ell_2 \cdot \left(\frac{\ell_2}{2} + \ell_1\right) + q \cdot \ell_1 \cdot \frac{\ell_1}{2},$$

$$M_A = -(-30) \cdot (0,5 + 1,5 + 1) - 30 - 50 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1,5}{2} + 0,5\right) + 50 \cdot 0,5 \cdot \frac{0,5}{2} = 27,5 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_B = 0;$$

$$-V_A \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - M_A + q \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) - q \cdot l_2 \cdot \left(\frac{l_2}{2} + l_3\right) + M = 0.$$

$$V_A = \frac{-M_A + q \cdot l_1 \cdot \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3\right) - q \cdot l_2 \cdot \left(\frac{l_2}{2} + l_3\right) + M}{(l_1 + l_2 + l_3)},$$

$$V_A = \frac{-27,5 + 50 \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{0,5}{2} + 1,5 + 1\right) - 50 \cdot 1,5 \cdot \left(\frac{1,5}{2} + 1\right) + 30}{(0,5 + 1,5 + 1)} = -20 \text{ кН}.$$

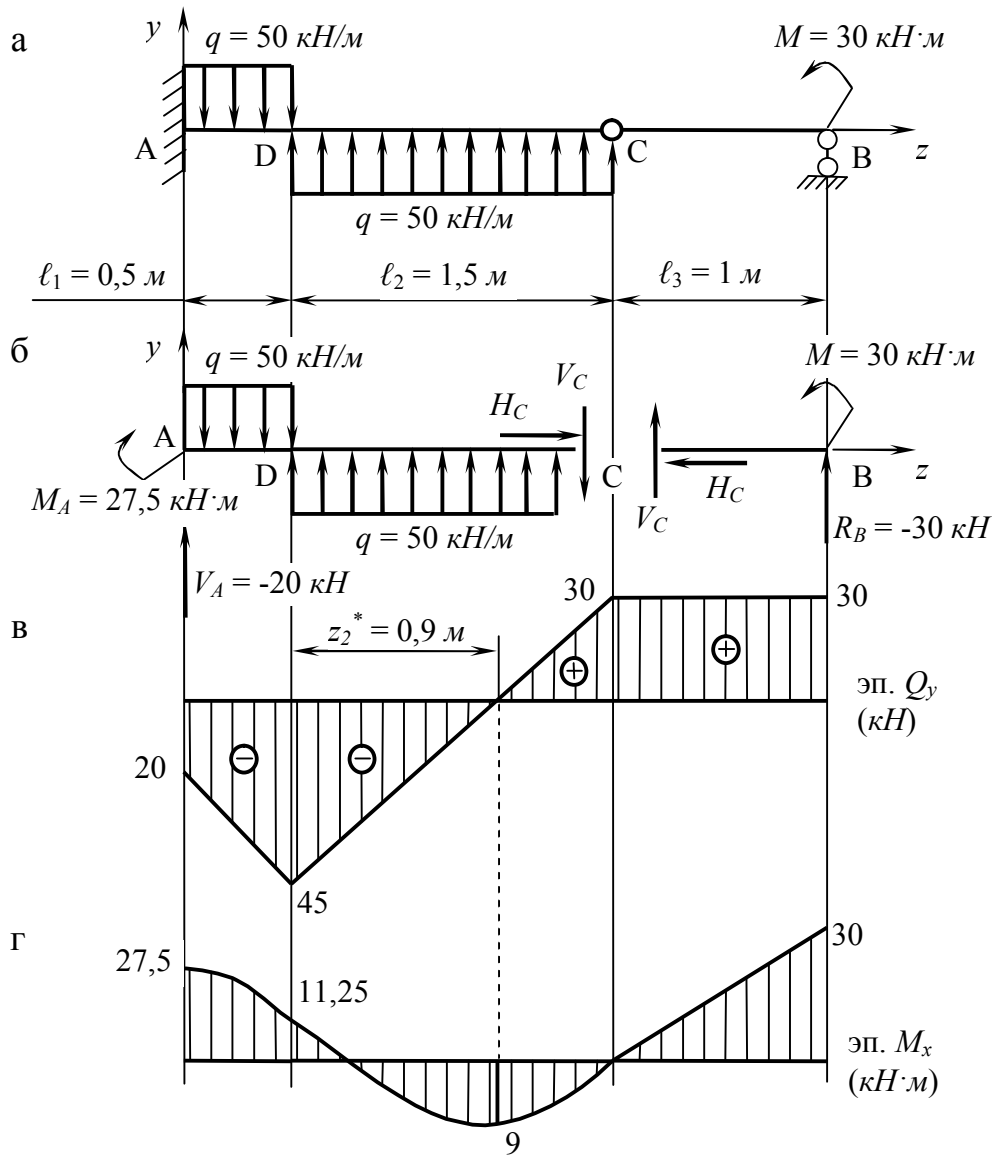


Рис. 1.15

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$V_A + R_B - q \cdot l_1 + q \cdot l_2 = 0,$$

$$-20 - 30 - 50 \cdot 0,5 + 50 \cdot 1,5 = 0.$$

2. Построение эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающего момента M_x .

Балка имеет три участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы, изгибающие моменты или распределенная нагрузка меняет свое направления. Для обнаружения внутренних силовых факторов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем балку на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2, z_3 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченной балки, заменяя действие отброшенных частей перерезывающей силой и изгибающим моментом (рис. 1.16).

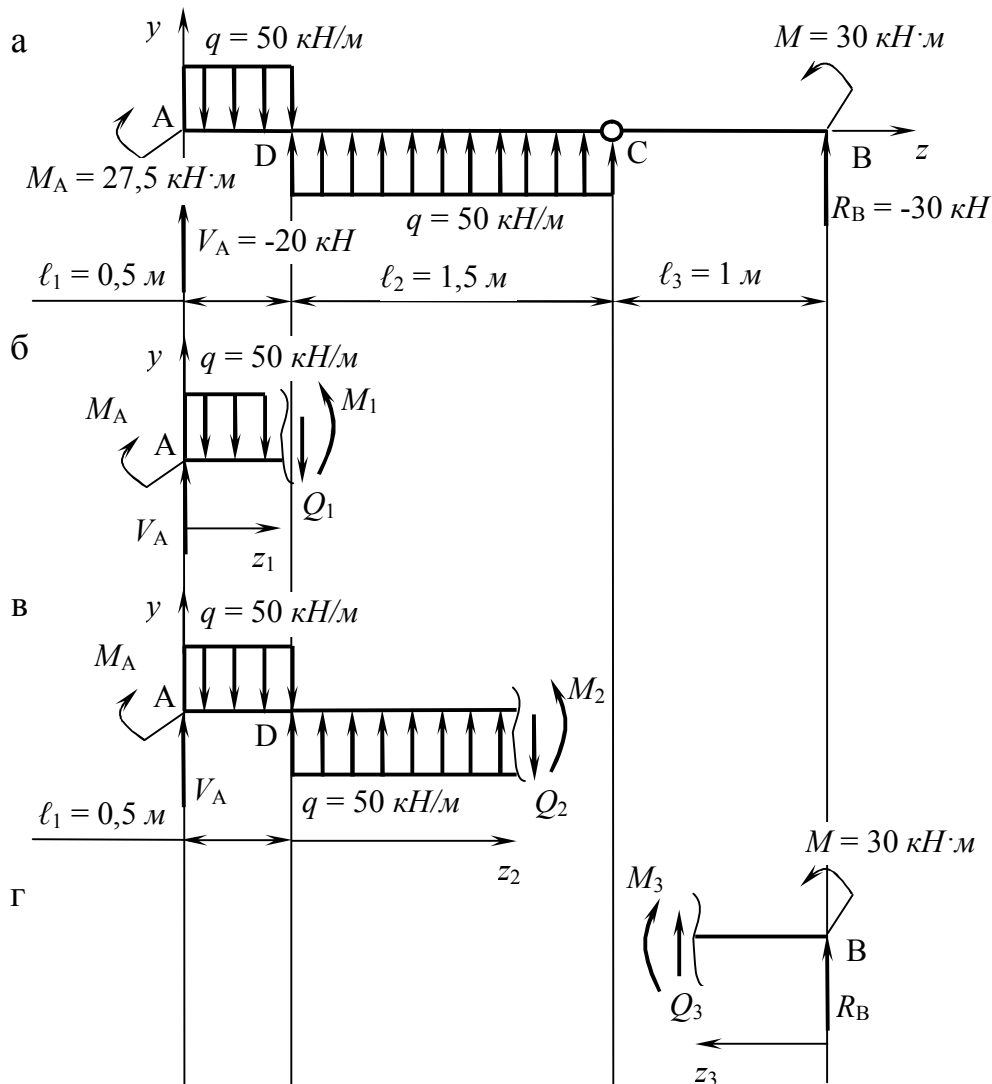


Рис. 1.16

В результате получаем уравнения равновесия

Участок AD ($0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м}$) – рис. 1.16б:

$$\sum y = 0; \quad Q_1 = V_A - q \cdot z_1 = -20 - 50 \cdot z_1.$$

$$Q_1(0) = -20 \text{ кН}. \quad Q_1(0,5) = -20 - 50 \cdot 0,5 = -45 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m = 0; M_1 = V_A \cdot z_1 + M_A - q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = -20 \cdot z_1 + 27,5 - 25 \cdot z_1^2.$$

$$M_1(0) = 27,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_1(0,5) = -20 \cdot 0,5 + 27,5 - 25 \cdot 0,5^2 = 11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DC ($0 \leq z_2 \leq 1,5 \text{ м}$) – рис. 1.16в:

$$\Sigma y = 0; Q_2 = V_A - q \cdot \ell_1 + q \cdot z_2 = -20 - 50 \cdot 0,5 + 50 \cdot z_2 = -45 + 50 \cdot z_2.$$

$$Q_2(0) = -45 \text{ кН}. Q_2(1,5) = -45 + 50 \cdot 1,5 = 30 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m = 0; M_2 = V_A \cdot (\ell_1 + z_2) + M_A - q \cdot \ell_1 \cdot \left(\frac{\ell_1}{2} + z_2\right) + q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}.$$

$$M_2 = -20 \cdot (0,5 + z_2) + 27,5 - 50 \cdot 0,5 \cdot (0,25 + z_2) + 50 \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}.$$

$$M_2 = 11,25 - 45 \cdot z_2 + 25 \cdot z_2^2.$$

$$M_2(0) = 11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2(1,5) = 11,25 - 45 \cdot 1,5 + 25 \cdot 1,5^2 = 0.$$

Эпюра Q на участке меняет знак, следовательно, эпюра изгибающих моментов имеет экстремум. Координата экстремума:

$$-45 + 50 \cdot z_2^* = 0,$$

откуда $z_2^* = \frac{45}{50} = 0,9 \text{ м}$.

Подставляем найденную координату в уравнение моментов:

$$M_2^* = 11,25 - 45 \cdot 0,9 + 25 \cdot 0,9^2 = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок СВ ($0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$) – рис. 1.16г:

$$\Sigma y = 0; Q_3 = -R_B = -(-30) = 30 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m = 0; M_3 = R_B \cdot z_3 + M = -30 \cdot z_3 + 30.$$

$$M_3(0) = 30; M_3(1) = -30 \cdot 1 + 30 = 0.$$

Перерезывающие силы и изгибающие моменты на каждом из участков известны, что позволяет легко построить графики-эпюры (рис. 1.15б и 1.15в). При этом эпюру изгибающих моментов строим на сжатых волокнах. При составлении уравнений равновесия на каждом из участков мы предположили что сжатыми будут верхние волокна. Соответственно, если полученные числовые значения положительны, их откладываем вверх, в противном случае – вниз.

3. *Контроль правильности построения эпюр с помощью правил Д. Журавского.*

Из дифференциальных зависимостей Д. Журавского

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y, \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

следует, что на равномерно загруженных участках AD и DC, где $q_y = const$, эпюра перерезывающих сил – прямая линия. При этом на

участке AD эюра перерезывающих сил $\frac{dQ_y}{dz} = \frac{d(-20 - 50z_1)}{dz} = -50 < 0$ – линия, убывающая с ростом z , а на участке DC – $\frac{dQ_y}{dz} = \frac{d(-45 + 50z_2)}{dz} = 50 > 0$ – линия, возрастающая с ростом z . Эюра моментов на данных участках – квадратичная парабола:

$$\text{участок AD} - \frac{dM_x}{dz} = \frac{d(-20 \cdot z_1 + 27,5 - 25 \cdot z_1^2)}{dz} = -20 - 50 \cdot z_1 = Q_1;$$

$$\text{участок DC} - \frac{dM_x}{dz} = \frac{d(11,25 - 45 \cdot z_2 + 25 \cdot z_2^2)}{dz} = -45 + 50 \cdot z_2 = Q_2.$$

На участке СВ $q_y = 0$ – эюра перерезывающих сил постоянна, а эюра изгибающих моментов – наклонная прямая линия. Так как на участке $Q_y > 0$, то эюра M_x с ростом z_3 возрастает (от точки С к точке В). Построенные эюры полностью соответствуют правилам Д. Журавского.

4. Подбор сечения.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\max}}{W_x} \leq [\sigma] = 20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

где $M^{\max} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м} = 3000 \text{ кН} \cdot \text{см}$;

W_x – момент сопротивления сечения,

$$W_x \geq \frac{M^{\max}}{[\sigma]} = \frac{3000}{20} = 150 \text{ см}^3.$$

Двутавровое сечение

Из сортамента выбираем двутавр № 20, $W_x = 184 \text{ см}^3$.

Прямоугольное сечение

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Так как $h/b = 2$, то $W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$,

откуда $b = \sqrt[3]{1,5 \cdot W_x} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 150} = 6,1 \text{ см}$. $h = 2 \cdot 6,1 = 12,2 \text{ см}$.

5. Проверка условия прочности балки прямоугольного поперечного сечения по касательным напряжениям

Для проверки прочности балки по касательным напряжениям используем формулу Журавского:

$$\tau^{\max} = \frac{Q^{\max} \cdot S^{\max}}{J_x \cdot b} \leq [\tau].$$

Для балки прямоугольного сечения формула принимает вид

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q^{\max}}{2 \cdot h \cdot b} = \frac{3 \cdot 45}{2 \cdot 12,2 \cdot 6,1} \cdot 10 = 9 \text{ МПа} \leq [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Задача 9. Для рамы (рис. 1.17а) построить эпюры нормальных N_z , перерезывающих Q_y сил и изгибающего момента M_x .

Дано:
 $q = 50 \text{ кН/м}$; $P = 10 \text{ кН}$; $L = 4 \text{ м}$.

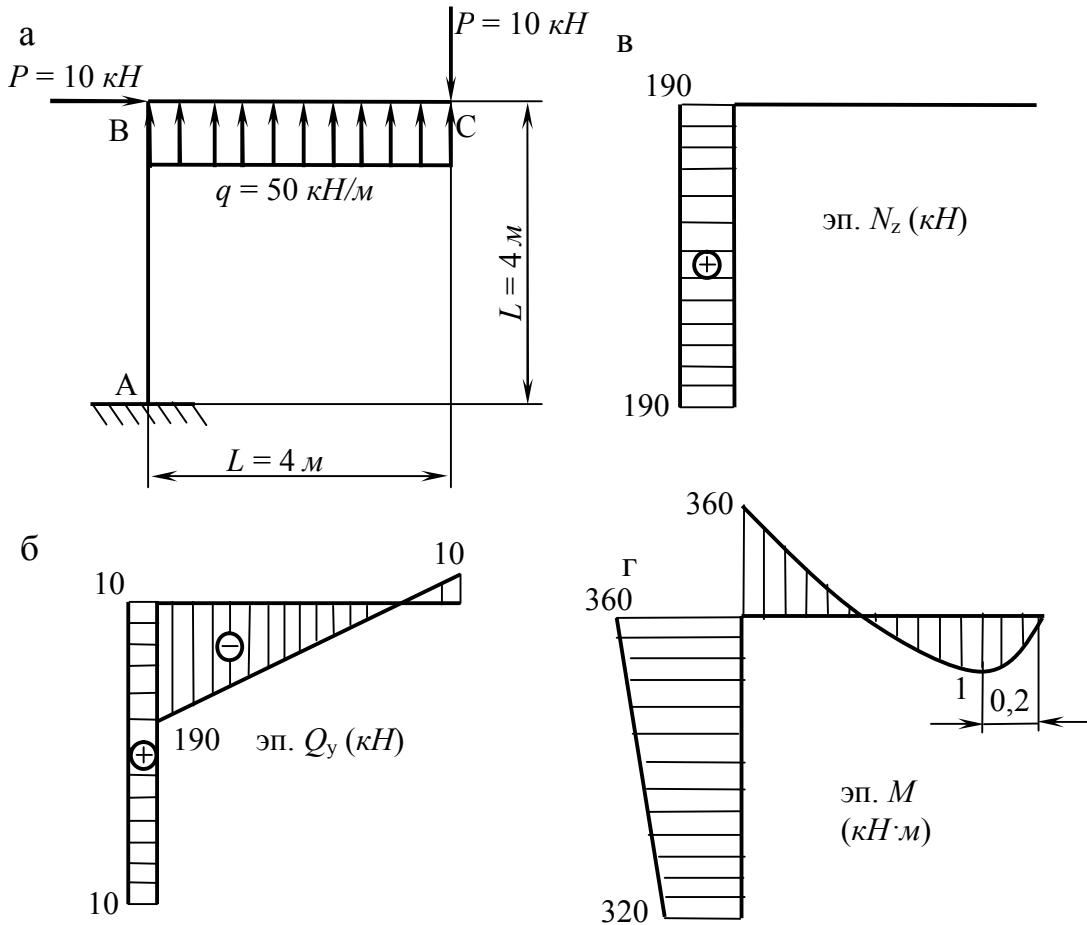


Рис. 1.17

Решение

1. Определение опорных реакций.

Для определения реакций отбрасываем внешние связи и заменяем их действие внешними силами (рис. 1.18а). Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma m_A = 0;$$

$$-M_A - P \cdot L - P \cdot L + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0,$$

откуда

$$M_A = -2P \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = -2 \cdot 10 \cdot 4 + 50 \cdot 4 \cdot 2 = 320 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\Sigma m_B = 0;$$

$$-H_A \cdot L - M_A - P \cdot L + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0,$$

откуда

$$H_A = \frac{-M_A - P \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{-320 - 10 \cdot 4 + 50 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 10 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_C = 0;$$

$$V_A \cdot L - H_A \cdot L - M_A - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0,$$

откуда

$$V_A = \frac{H_A \cdot 4 + M_A + q \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{10 \cdot 4 + 320 + 50 \cdot 4 \cdot 2}{4} = 190 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0; V_A + P - q \cdot L = 0.$$

$$190 + 10 - 50 \cdot 4 = 0.$$

$$\Sigma X = 0; H_A - P = 0.$$

$$10 - 10 = 0.$$

2. Построение эпюры нормальных N_z и перерезывающих сил Q_y и изгибающего момента M_x .

Рама имеет два участка, границей которых служит сечение, где продольная ось меняет свое направление. Для обнаружения внутренних силовых факторов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем балку на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченной балки, заменяя действие отброшенных частей нормальной и перерезывающей силами и изгибающим моментом (рис. 1.18).

В результате получаем уравнения равновесия:

Участок BC ($0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 1.18б:

$$\Sigma z = 0; N_1 = 0.$$

$$\Sigma y = 0; Q_1 = P - q \cdot z_1 = 10 - 50 \cdot z_1.$$

$$Q_1(0) = 10 \text{ кН}; Q_1(4) = 10 - 50 \cdot 4 = -190 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m = 0; M_1 = -P \cdot z_1 + \frac{q \cdot z_1^2}{2} = -10 \cdot z_1 + 25 \cdot z_1^2.$$

$$M_1(0) = 0; M_1(4) = -10 \cdot 4 + 25 \cdot 4^2 = 360 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра Q на участке меняет знак, следовательно, эпюра изгибающих моментов имеет экстремум. Координата экстремума:

$$10 - 50 \cdot z_1^* = 0,$$

откуда $z_1^* = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ м}$.

Подставляем найденную координату в уравнение моментов:

$$M_1^* = -10 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,2^2 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок АВ ($0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 1.18в:

$$\Sigma z = 0; N_2 = V_A = 190 \text{ кН}.$$

$$\Sigma y = 0; Q_2 = H_A = 10 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m = 0; M_2 = -H_A \cdot z_2 - M_A = -10 \cdot z_2 - 320.$$

$$M_2(0) = -320 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2(4) = -10 \cdot 4 - 320 = -360 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

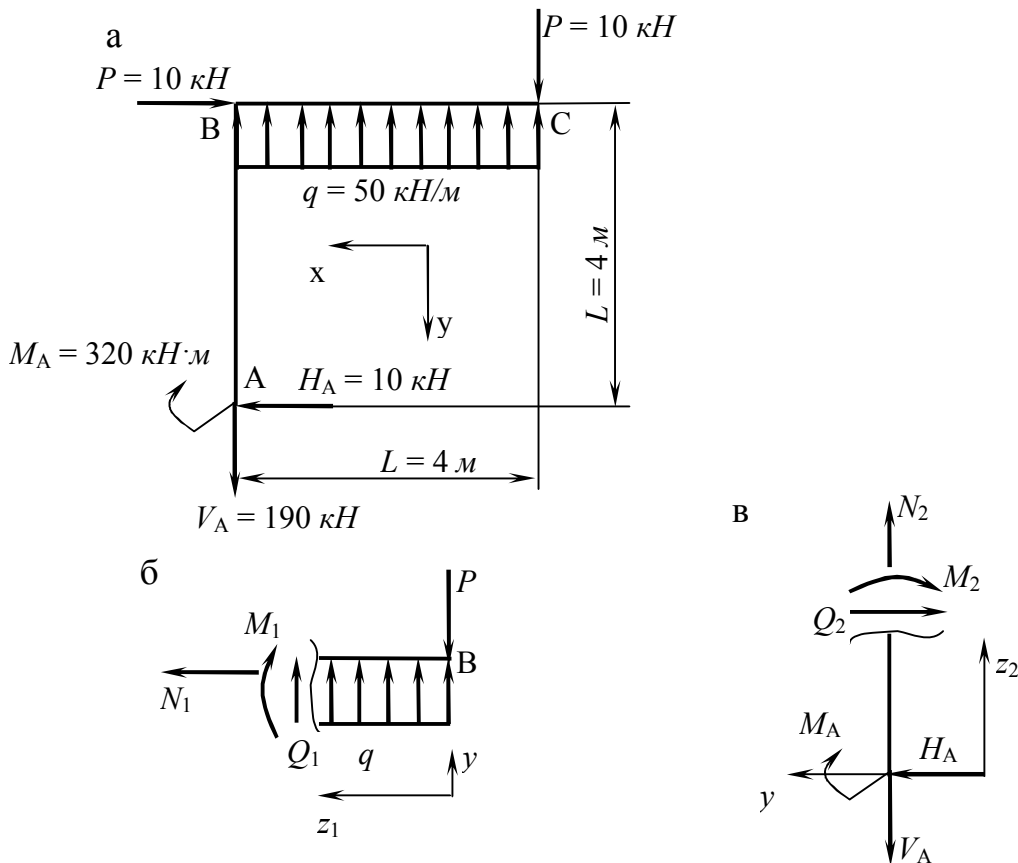


Рис. 1.18

Нормальные и перерезывающие силы и изгибающие моменты на каждом из участков известны, что позволяет легко построить графики-эпюры (рис. 1.17б–1.17г). При этом эпюру изгибающих моментов строим на сжатых волокнах.

2. Определение перемещений в балках и стержневых системах энергетическим методом с использованием формулы Мора

Комментарий

Интегралы в формуле Мора для прямолинейных стержней с постоянной жесткостью имеют вид

$$I = \int_0^l \frac{f \bar{f}}{C} dz,$$

где f может быть любым силовым фактором N, M_x, M_y, M_z ;

C – соответствующая жесткость элемента $EF, GJ_{кр}, EJ_x, EJ_y$,

$\bar{f} = kz + b$ – уравнение прямой линии, описывающее эпюры $\bar{N}, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$ от действия единичной силы $\bar{P} = 1$ или единичного момента $\bar{M} = 1$, приложенных в точке, в которой ищется перемещение.

Криволинейная эпюра f и прямолинейная эпюра \bar{f} от действия единичного силового фактора представлены на рис. 2.1.

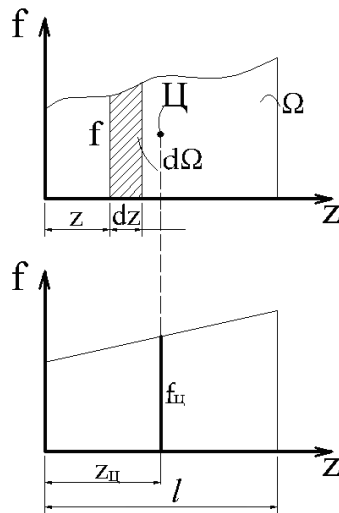


Рис. 2.1

После подстановки получим

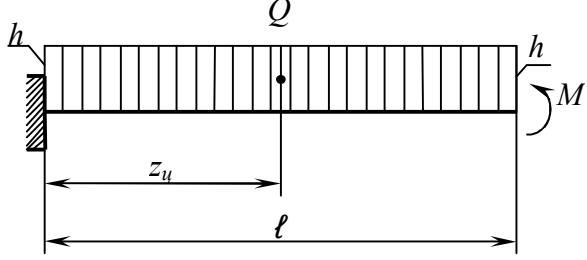
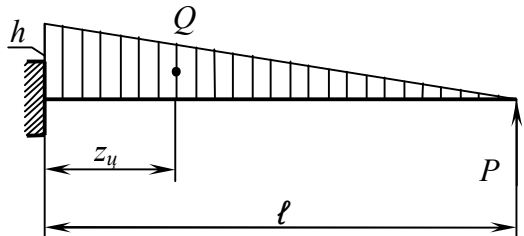
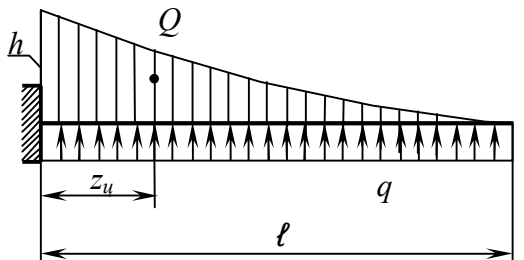
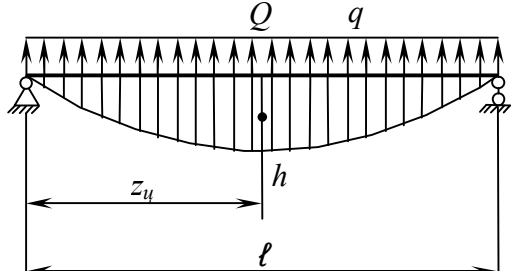
$$I = \frac{\Omega(kz_{\text{Ц}} + b)}{C} = \frac{\Omega \bar{f}_{\text{Ц}}}{C},$$

где Ω – площадь, ограниченная криволинейной эпюрой с центром тяжести в точке Ц, определяемой координатой $z_{\text{Ц}}$ на оси z .

То есть интеграл равен площади, ограниченной криволинейной эпюрой, умноженной на ординату, взятую из прямолинейной эпюры под центром тяжести криволинейной эпюры.

Вычисление площадей Ω и положение их центров тяжести z_u может быть сведено к вычислению простейших геометрических фигур – прямоугольников, треугольников, а также фигур, ограниченных квадратичными и кубическими параболоми. В табл. 2.1 для таких фигур приведены необходимые для решения задач данные.

Таблица 2.1

№	Схема	h	Ω	z_u
1		m	hl	$\frac{l}{2}$
2		Pl	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$
3		$\frac{ql^2}{2}$	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$
4		$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$

При решении задач могут встретиться эпюры из суммы приведенных в таблице.

Формула Мора для определения перемещений широко применяется в сопротивлении материалов и строительной механике.

Примеры решения задач

Задача 10. Для балки (рис. 2.2а) определить прогиб в точке В и угол поворота сечения в точке С с помощью формулы Мора, используя способ Верещагина для вычисления ее интегралов.

Дано:

$$q = 10 \text{ кН/м}; P = 80 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; L = 2 \text{ м}.$$

Решение

1. *Определение опорных реакций.*

Для определения реакций отбрасываем внешние связи и заменяем их действие внешними силами (рис. 2.2б). Составляем уравнения равновесия:

$$\Sigma z = 0; H_A = 0.$$

$$\Sigma m_A = 0;$$

$$-V_C \cdot L + P \cdot 3L + M - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0,$$

откуда

$$V_C = \frac{P \cdot 3L + M - q \cdot L^2 / 2}{L} = \frac{80 \cdot 3 \cdot 2 + 20 - 10 \cdot 2^2 / 2}{2} = 240 \text{ кН}.$$

$$\Sigma m_C = 0;$$

$$R_A \cdot L + P \cdot 2L + M - q \cdot L \cdot \left(L + \frac{L}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{-P \cdot 2L - M + q \cdot 3L^2 / 2}{L} = \frac{-80 \cdot 2 \cdot 2 - 20 + 10 \cdot 3 \cdot 2^2 / 2}{2} = -140 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_A + V_C - q \cdot L - P = 0.$$

$$-140 + 240 - 10 \cdot 2 - 80 = 0.$$

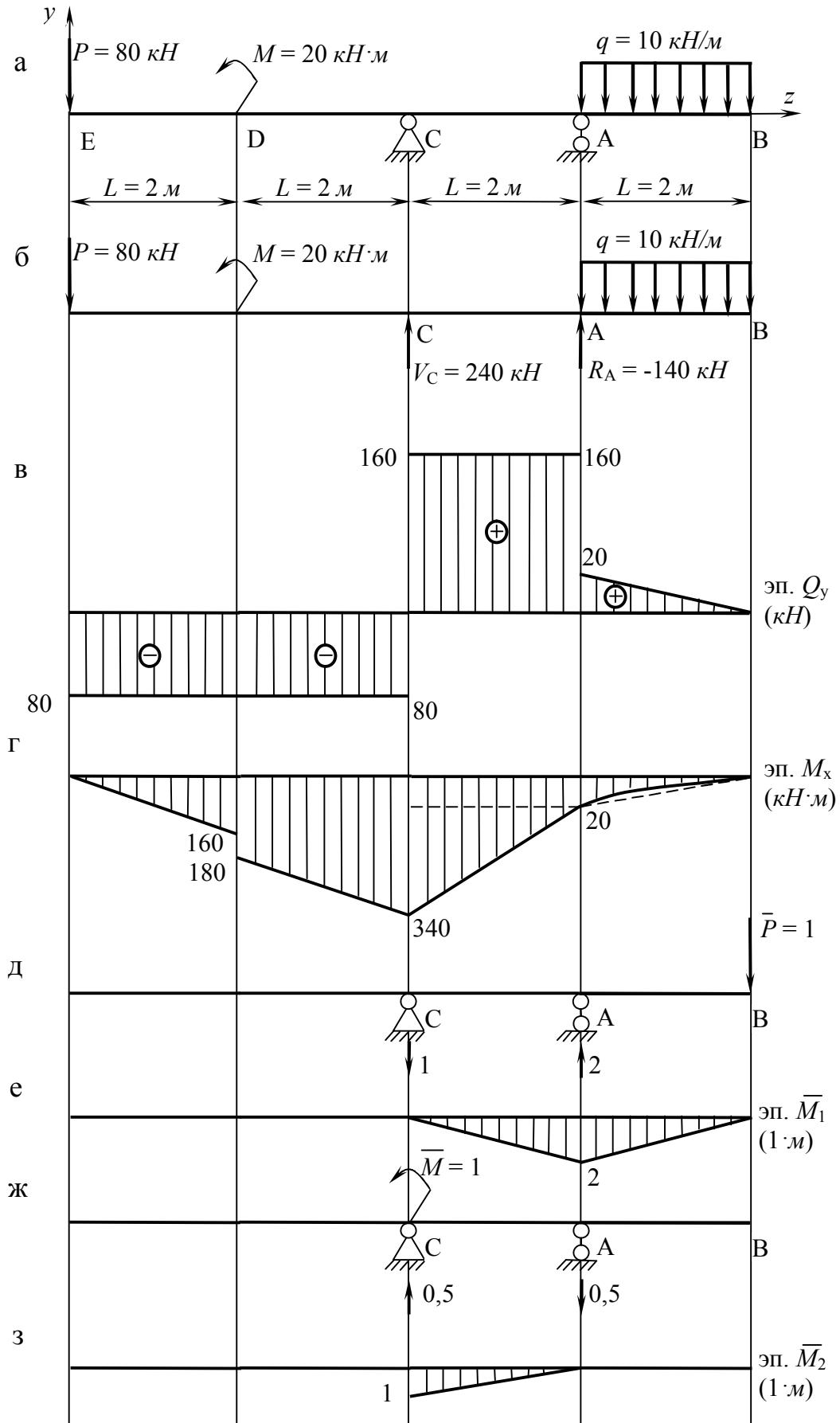


Рис. 2.2

2. Построение эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающего момента M_x .

Балка имеет четыре участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы или изгибающие моменты. Для обнаружения внутренних силовых факторов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем балку на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2, z_3, z_4 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченной балки, заменяя действие отброшенных частей перерезывающей силой и изгибающим моментом (рис. 2.3).

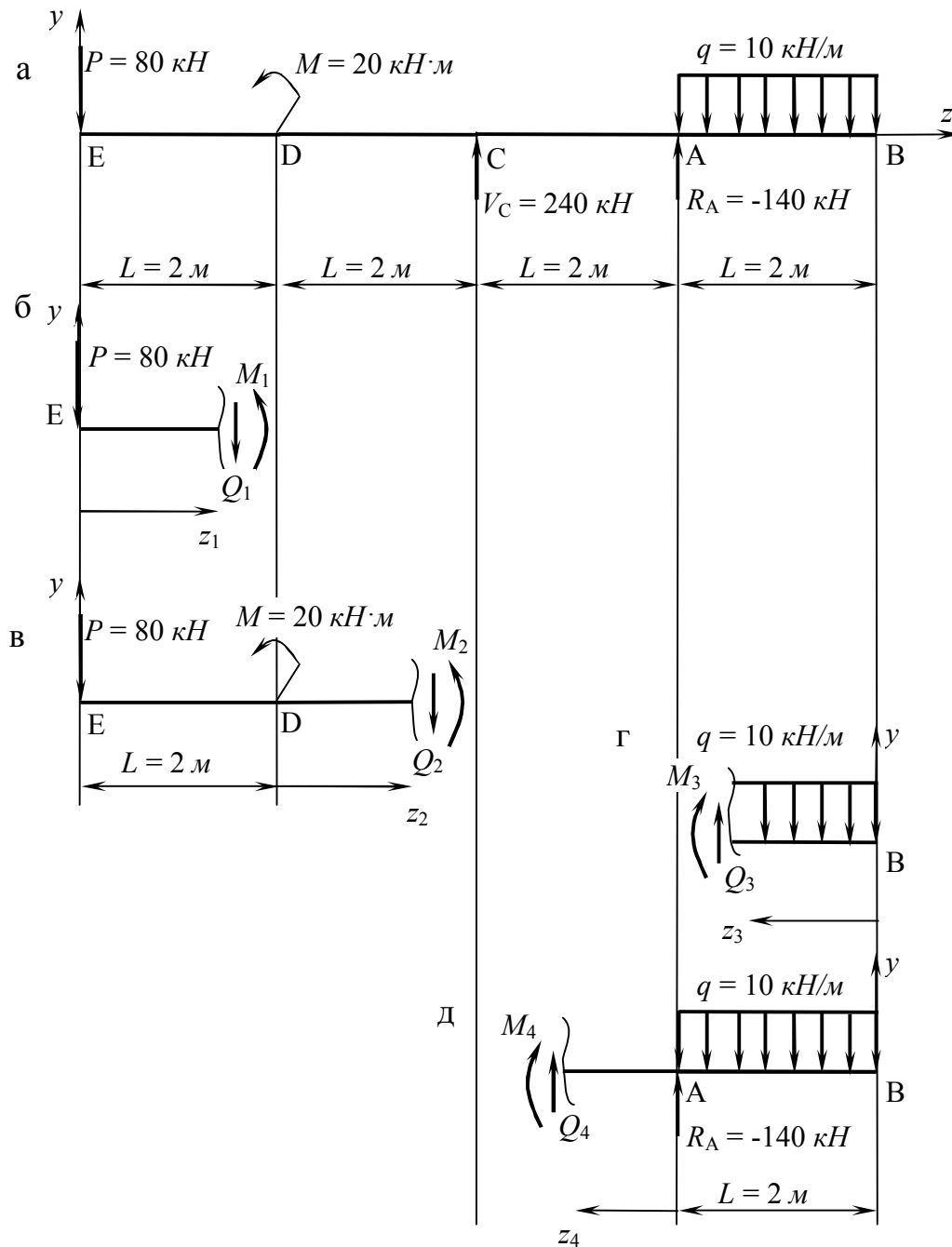


Рис. 2.3

В результате получаем уравнения равновесия:

Участок ED ($0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$) – рис. 2.3б:

$$\Sigma y = 0; Q_1 = -P = -80 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0; M_1 = -P \cdot z_1 = -80 \cdot z_1.$$

$$M_1(0) = 0; M_1(2) = -80 \cdot 2 = -160 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DC ($0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$) – рис. 2.3в:

$$\Sigma y = 0; Q_2 = -P = -80 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0; M_2 = -P \cdot (L + z_2) - M = -80 \cdot (2 + z_2) - 20 = -180 - 80 \cdot z_2.$$

$$M_2(0) = -180 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2(2) = -180 - 80 \cdot 2 = -340 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BA ($0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$) – рис. 2.2г:

$$\Sigma y = 0; Q_3 = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3.$$

$$Q_3(0) = 0 \text{ кН}; Q_3(2) = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0; M_3 = -\frac{q \cdot z_3^2}{2} = -5 \cdot z_3^2.$$

$$M_3(0) = 0; M_3(2) = -5 \cdot 2^2 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок AC ($0 \leq z_4 \leq 2 \text{ м}$) – рис. 2.2в:

$$\Sigma y = 0; Q_4 = q \cdot L - R_A = 10 \cdot 2 - (-140) = 160 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0; M_3 = -q \cdot L \cdot (L/2 + z_4) + R_A \cdot z_4 = -160 \cdot z_4 - 20.$$

$$M_4(0) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_4(2) = -160 \cdot 2 - 20 = -340 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перерезывающие силы и изгибающие моменты на каждом из участков известны, что позволяет легко построить графики-эпюры (рис. 2.2в и 2.2г). При этом эпюру изгибающих моментов строим на сжатых волокнах. При составлении уравнений равновесия на каждом из участков мы предположили, что сжатыми будут верхние волокна. Соответственно, если полученные числовые значения положительны, их откладываем вверх, в противном случае – вниз.

3. Определение прогиба в точке В.

Для определения прогиба в точке В прикладываем к этой точке единичную силу $\bar{P} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (см. рис. 2.2д и 2.2е).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, прогиб в точке В равен

$$\begin{aligned} V_B &= \Sigma \int_0^l \frac{M \bar{M}_1}{EJ} dz = \Sigma \frac{\Omega \bar{f}_{\text{ц}}}{EJ} = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{320 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{820}{3EJ}. \end{aligned}$$

4. Определение угла поворота в точке С.

Для определения угла поворота в точке С прикладываем к этой точке единичный изгибающий момент $\bar{M} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (см. рис. 2.2д и 2.2е).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, угол поворота в точке С равен

$$\theta_C = \sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_2}{EJ} dz = \sum \frac{\Omega \bar{f}_{\text{ц}}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{320 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right] = \frac{700}{3EJ}.$$

Задача 11. Для балки (рис. 2.4а) определить прогиб в т.В и угол поворота сечения в т.С с помощью формулы Мора, используя способ Верещагина для вычисления ее интегралов.

Дано:

$$q = 50 \text{ кН/м}; P = 10 \text{ кН}; M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; L = 4 \text{ м}.$$

Решение

1. Определение опорных реакций.

Для определения реакций, отбрасываем внешние связи и заменяем их действие внешними силами (рис. 2.2б). Составляем уравнения равновесия:

$$\sum z = 0; H_A = 0.$$

$$\sum m_A = 0;$$

$$-V_C \cdot 2L - P \cdot 3L - M + q \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2} + L\right) = 0,$$

откуда

$$V_C = \frac{-P \cdot 3L - M + q \cdot 3L^2 / 2}{2L} = \frac{-10 \cdot 3 \cdot 4 - 30 + 50 \cdot 3 \cdot 4^2 / 2}{2 \cdot 4} = 131,25 \text{ кН}.$$

$$\sum m_C = 0;$$

$$R_A \cdot 2L - P \cdot L - M - q \cdot \frac{L^2}{2} = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{P \cdot L + M + q \cdot L^2 / 2}{2L} = \frac{10 \cdot 4 + 30 + 50 \cdot 4^2 / 2}{2 \cdot 4} = 58,75 \text{ кН}.$$

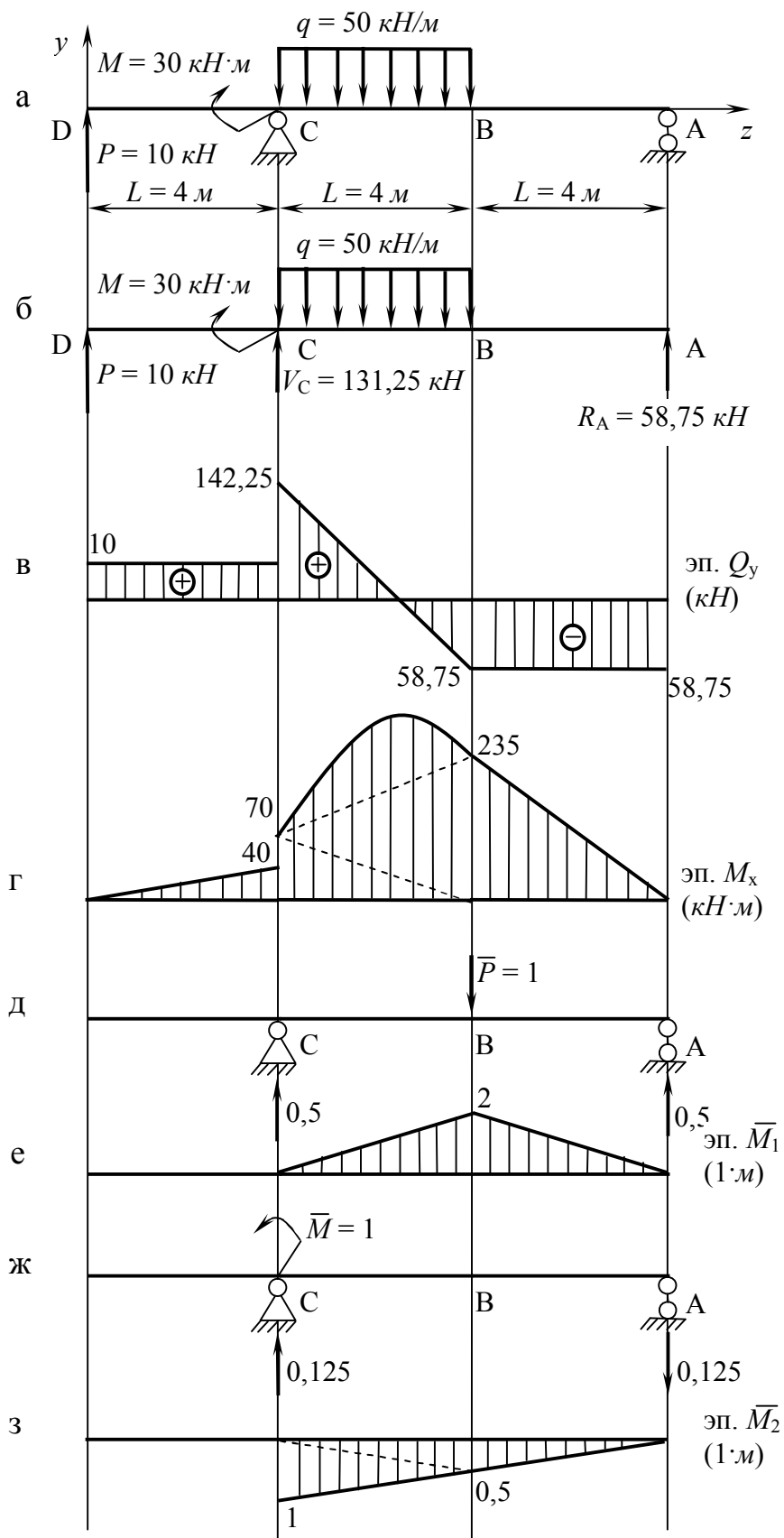


Рис. 2.4

Проверка:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_A + V_C - q \cdot L + P = 0.$$

$$131,25 + 58,75 - 50 \cdot 4 + 10 = 0.$$

2. Построение эпюры перерезывающих сил Q_y и изгибающего момента M_x .

Балка имеет три участка, границами которых служат сечения, где приложены внешние сосредоточенные силы или изгибающие моменты. Для обнаружения внутренних силовых факторов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем балку на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2, z_3 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченной балки, заменяя действие отброшенных частей перерезывающей силой и изгибающим моментом (рис. 2.5).

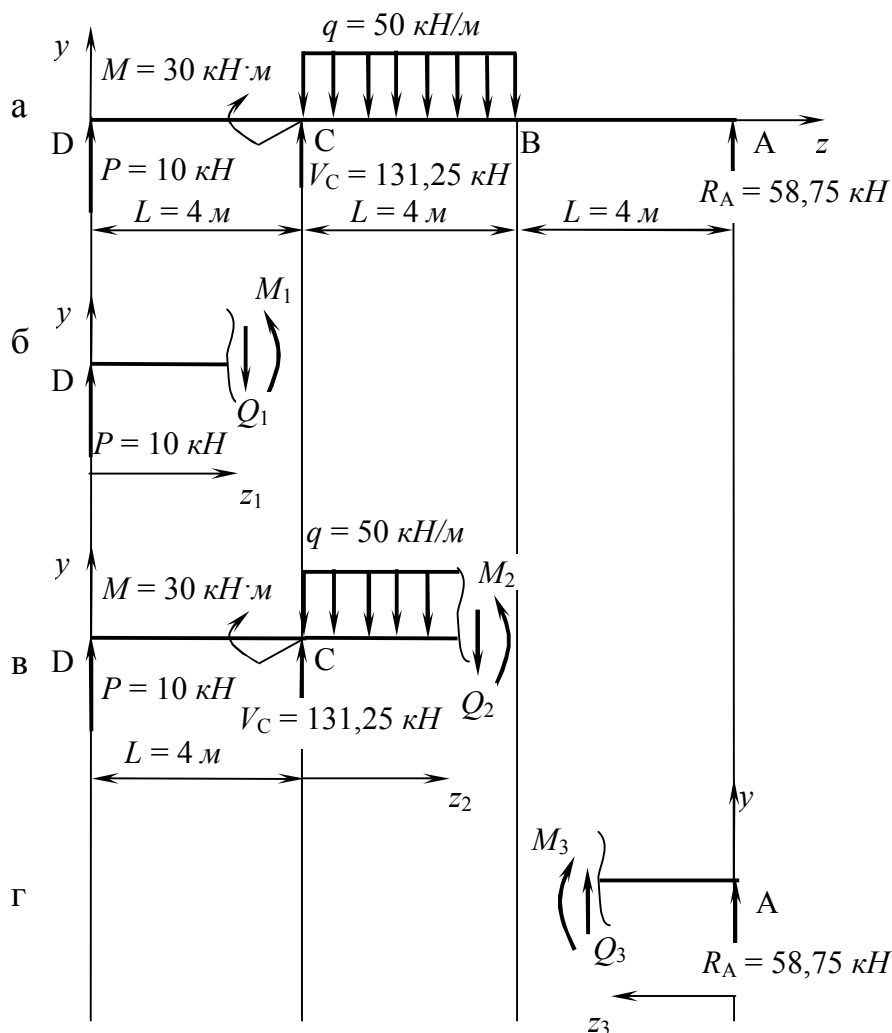


Рис. 2.5

В результате получаем уравнения равновесия:

Участок DC ($0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 2.5б:

$$\Sigma y = 0; Q_1 = P = 10 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0; M_1 = P \cdot z_1 = 10 \cdot z_1.$$

$$M_1(0) = 0; M_1(4) = 10 \cdot 4 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CB ($0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 2.5в:

$$\Sigma y = 0; Q_2 = P + V_C + q \cdot z_2 = 10 + 131,25 - 50 \cdot z_2 = 141,25 - 50 \cdot z_2.$$

$$Q_2(0) = 141,25 \text{ кН}; Q_2(4) = 141,25 - 50 \cdot 4 = -58,75 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0;$$

$$M_2 = P \cdot (L + z_2) + M + V_C \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} =$$

$$= 10 \cdot (4 + z_2) + 30 + 131,25 \cdot z_2 - 50 \cdot \frac{z_2^2}{2} / 2.$$

$$M_2 = 70 + 141,25 \cdot z_2 - 50 \cdot \frac{z_2^2}{2} / 2.$$

$$M_2(0) = 70 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2(4) = 70 + 141,25 \cdot 4 - 50 \cdot \frac{4^2}{2} / 2 = 235 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BA ($0 \leq z_3 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 2.5г:

$$\Sigma y = 0; Q_3 = -R_A = -58,75 \text{ кН.}$$

$$\Sigma m = 0; M_3 = R_A \cdot z_3 = 58,75 \cdot z_3.$$

$$M_3(0) = 0; M_3(4) = 58,75 \cdot 4 = 235 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Перерезывающие силы и изгибающие моменты на каждом из участков известны, что позволяет легко построить графики-эпюры (рис. 2.4в и 2.4г). При этом эпюру изгибающих моментов строим на сжатых волокнах. При составлении уравнений равновесия на каждом из участков мы предположили, что сжатыми будут верхние волокна. Соответственно, если полученные числовые значения положительны, их откладываем вверх, в противном случае – вниз.

3. Определение прогиба в точке В.

Для определения прогиба в точке В прикладываем к этой точке единичную силу $\bar{P} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (см. рис. 2.4д и 2.4е).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, прогиб в точке В равен

$$V_B = \Sigma \int_0^l \frac{M \bar{M}_1}{EJ} dz = \Sigma \frac{\Omega \bar{f}_{\text{ц}}}{EJ} =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left[\frac{235 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{70 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{235 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{4840}{3EJ}.$$

4. Определение угла поворота в точке С.

Для определения угла поворота в точке С прикладываем к этой точке единичный изгибающий момент $\bar{M} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (см. рис. 2.4д и 2.4е).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, угол поворота в точке С равен

$$\begin{aligned} \theta_C &= \Sigma \int_0^l \frac{M \bar{M}_2}{EJ} dz = \Sigma \frac{\Omega \bar{f}_n}{EJ} = \\ &= -\frac{1}{EJ} \left[\frac{235 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{70 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ &\left. + \frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \right) + \frac{235 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right] = -\frac{2306}{3EJ}. \end{aligned}$$

Задача 12. Для рамы с постоянной жесткостью участков ($EJ_x = \text{const}$) (рис. 2.6а) определить вертикальное и горизонтальное перемещение точке В.

Дано:

$$q = 50 \text{ кН/м}; P = 10 \text{ кН}; L = 4 \text{ м}.$$

Решение

Для определения перемещений точке В в заданной системе по правилу Верещагина нам необходимо построить три эпюры изгибающих моментов (одну грузовую эпюру от действующих сил и моментов и две единичные эпюры от действия единичной силы, приложенной в точке В в вертикальном и горизонтальном направлениях соответственно).

Так как заданная рама консольная, то нахождение опорных реакций необязательно. Рама имеет два расчетных участка. Для обнаружения внутренних силовых факторов на этих участках используем метод сечений. Мысленно рассекаем раму на каждом из участков на расстояниях z_1, z_2 и рассматриваем равновесие одной из частей рассеченной рамы, заменяя действие отброшенных частей нормальной и перерезывающей силой и изгибающим моментом (рис. 2.7).

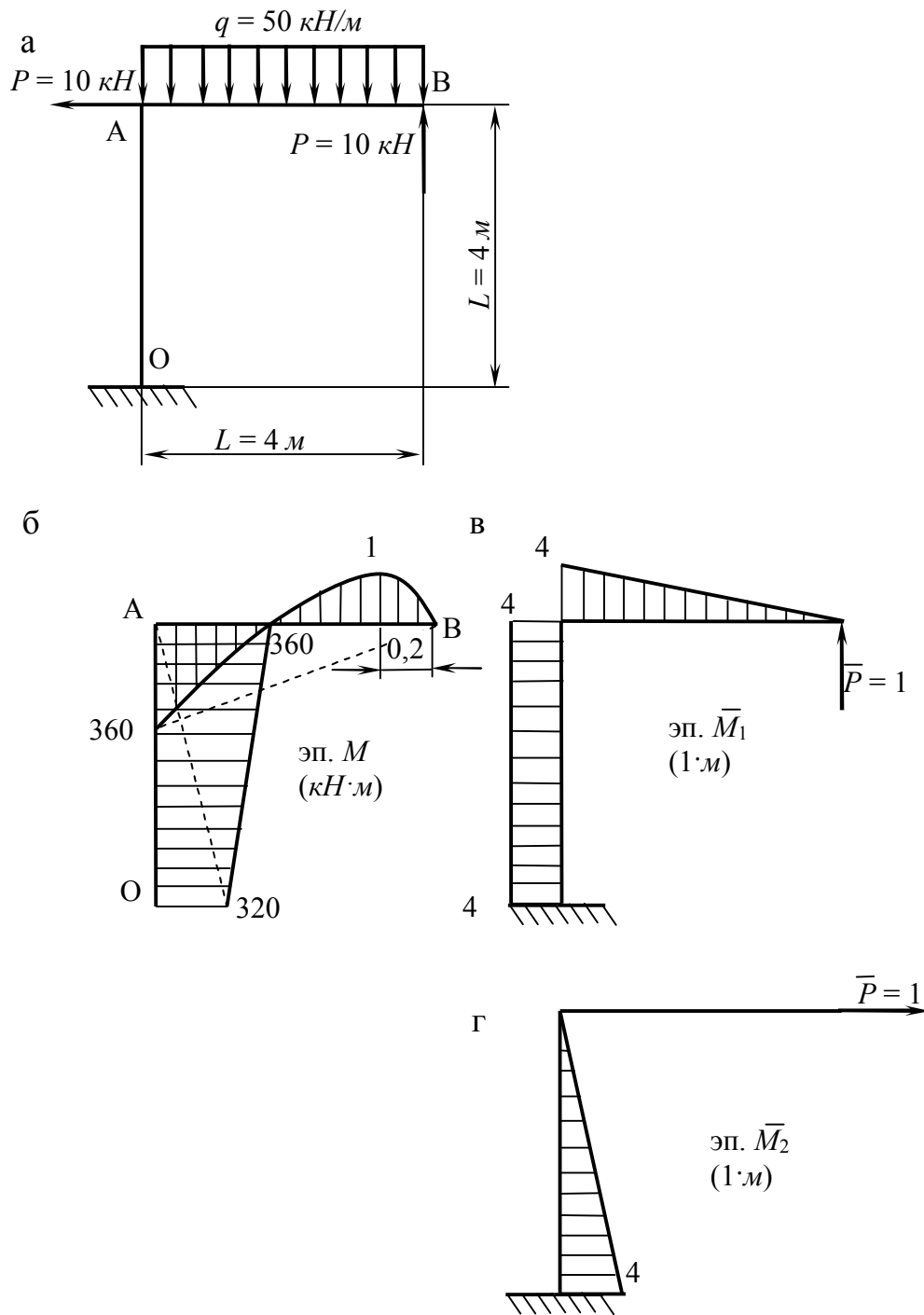


Рис. 2.6

Построение эюры изгибающих моментов:

Участок АВ ($0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 2.7б:

$$\Sigma m = 0; M_1 = -P \cdot z_1 + q \cdot \frac{z_1^2}{2} = -10 \cdot z_1 + 25 \cdot z_1^2.$$

$$M_1(0) = 0; M_1(4) = -10 \cdot 4 + 25 \cdot 4^2 = 360 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так как на участке действует распределенная нагрузка и эюра изгибающих моментов имеет параболическое очертание, то необходимо проверить наличие экстремума. Для этого найдем значения перерезывающей силы на этом участке, составив уравнение равновесия:

$$\Sigma y = 0; Q_1 = -P + q \cdot z_1 = -10 + 50 \cdot z_1.$$

$$Q_1(0) = -10 \text{ кН}; Q_1(4) = -10 + 50 \cdot 4 = 190 \text{ кН}.$$

Эюра перерезывающих сил по длине участка меняет свой знак, следовательно экстремальное значение на эюре моментов расположено на расстоянии

$$-10 + 50 \cdot z_1^* = 0; z_1^* = 10/50 = 0,2 \text{ м}.$$

$$M_1 = -10 \cdot z_1^* + 25 \cdot (z_1^*)^2 = -10 \cdot 0,2 + 25 \cdot 0,2^2 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок АО ($0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$) – рис. 2.7в:

$$\Sigma m = 0;$$

$$M_2 = -P \cdot L + q \cdot \frac{L^2}{2} - P \cdot z_2 = -10 \cdot 4 + 25 \cdot 4^2 - 10 \cdot z_2 = 360 - 10 \cdot z_2.$$

$$M_2(0) = 360 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2(4) = 360 - 10 \cdot 4 = 320 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эюра моментов приведена на рисунке 2.6б.

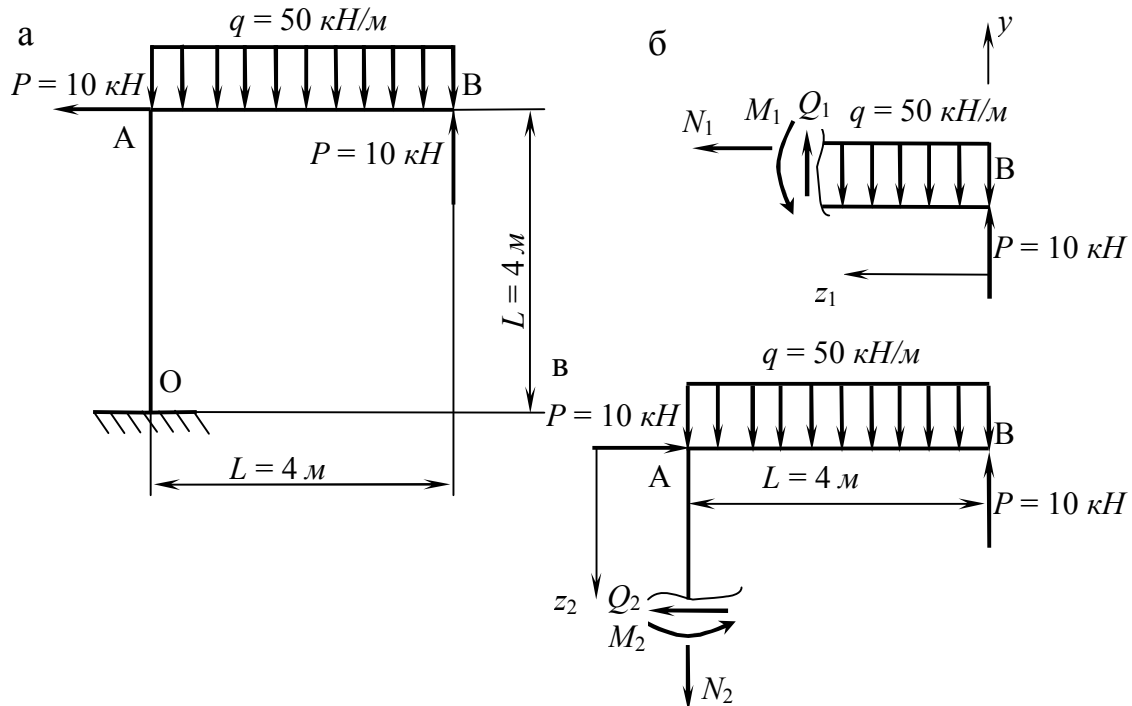


Рис. 2.7

Определение вертикального перемещения в точке В

Для определения вертикального перемещения в точке В прикладываем к этой точке единичную вертикальную силу $\bar{P} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (см. рис.2.6в).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, вертикальное перемещение в точке В равно

$$V_B^{верт} = \sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_1}{EJ} dz = \sum \frac{\Omega \bar{f}_ц}{EJ} =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left[\frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{360 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{360 \cdot 4}{2} \cdot 4 - \frac{320 \cdot 4}{2} \cdot 4 \right] = -\frac{4907}{EJ}.$$

Определение горизонтального перемещения в точке В

Для определения горизонтального перемещения в точке В прикладываем к этой точке единичную горизонтальную силу $\bar{P} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M}_2 (см. рис. 2.6г).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, горизонтальное перемещение в точке В равно

$$V_B^{гор} = \sum \int_0^l \frac{M \bar{M}_2}{EJ} dz = \sum \frac{\Omega \bar{f}_ц}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{360 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{320 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{2667}{EJ}.$$

Суммарный прогиб (перемещение) точки В:

$$V_B = \sqrt{(V_B^{верт})^2 + (V_B^{гор})^2} = \sqrt{\left(-\frac{4907}{EJ}\right)^2 + \left(\frac{2667}{EJ}\right)^2} = \frac{5585}{EJ}.$$

3. Расчет статически неопределимых балок методом сил

Комментарий

Степень статической неопределимости системы определяется по формуле

$$n = (R - 3) + 3K - Ш_0,$$

где R – число внешних простых связей, K – число замкнутых стержневых контуров, $Ш_0$ – число простых внутренних шарниров.

Каноническая система уравнений метода сил в случае n -раз статически неопределимой системы ($n = 1, 2, \dots$) имеет вид

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j + \Delta_i(P) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где индекс i определяет направление, в котором вычисляется перемещение, а j – номер лишней неизвестной.

Коэффициенты δ_{ij} называются *податливостями*. Они имеют простой геометрический смысл. Это перемещение в i -м направлении от единичной силы, действующей в j -м направлении. Перемещение $\Delta_i(P)$ это перемещение в i -м направлении от внешней нагрузки, действующей на основную систему. Указанные перемещения без учета влияния нормальных сил определяются на основании формулы Мора:

$$\delta_{ij} = \int_0^l \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EJ} dz, \quad \Delta_i(P) = \int_0^l \frac{M_P \bar{M}_i}{EJ} dz,$$

с использованием графоаналитического способа Верещагина для вычисления интегралов Мора.

При решении задач для проверки правильности определенных неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n производится деформационная проверка и статическая проверка равновесия вырезанных узлов системы. Деформационная проверка состоит в определении заранее известных перемещений в i -х направлениях, обычно равных нулю.

Примеры решения задач

Задача 13. Для балки (рис. 3.1а) с постоянной жесткостью участков ($EJ_x = \text{const}$) требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость.
2. Провести деформационную проверку правильности полученного решения.
3. Подобрать двутавровое поперечное сечение, если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

Дано:

$$q = 10 \text{ кН/м}; P = 80 \text{ кН}; M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}; L = 2 \text{ м}, [\sigma] = 210 \text{ МПа}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

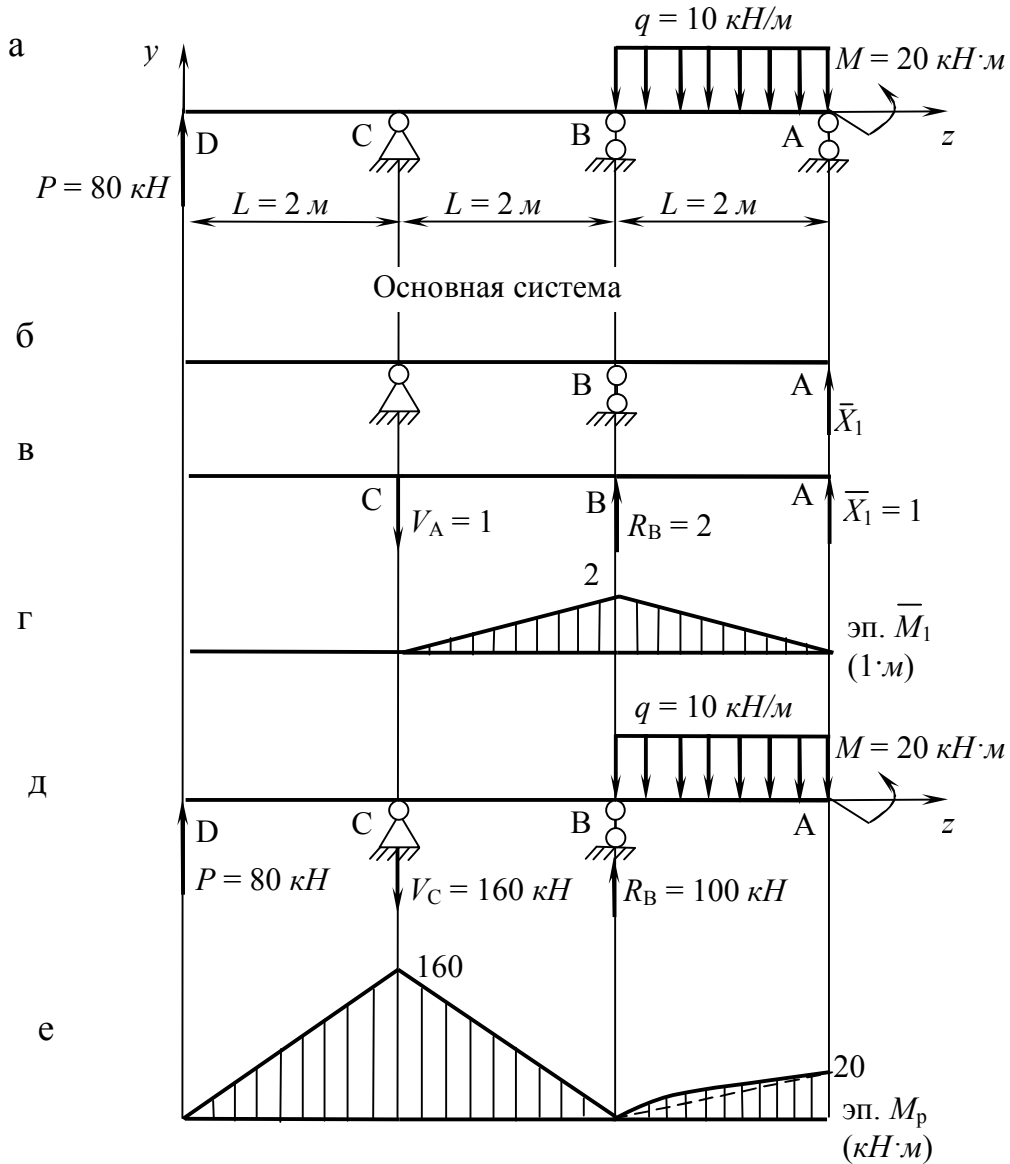


Рис. 3.1

Решение

Определяем степень статической неопределимости:

$$n = (R - 3) + 3K - III_0 = (4 - 3) + 0 - 0 = 1.$$

Выбираем основную систему. Для этого исключаем связь в точке A и заменяем ее действие силой \bar{X}_1 (см. рис. 3.1б).

Каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы имеет вид

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов уравнения строим эпюры изгибающих моментов:

\bar{M}_1 от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис.3.1в, 3.1г);

M_p от заданной нагрузки (см. рис. 3.1д, 3.1е).

С использованием графоаналитического способа Верещагина для вычисления интегралов Мора находим коэффициенты уравнения (перемещения):

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 2 \right] = \frac{16}{3EJ}.$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{160 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{380}{3EJ}.$$

Подставляем найденные коэффициенты в каноническое уравнение метода сил и вычисляем неизвестную величину X_1 .

$$\frac{16}{3EJ} \cdot X_1 + \frac{380}{3EJ} = 0,$$

откуда $X_1 = -23,75 \text{ кН}$.

Прикладываем к заданной системе найденное значение X_1 , меняя его направление на противоположное, и загружаем ее заданной нагрузкой (см. рис. 3.2а).

Для заданной системы строим эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 3.2б, 3.2в).

Делаем деформационную проверку:

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{160 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 - \frac{47,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{47,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{20 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = 0.$$

Деформационная проверка показала, что перемещение в точке А равно 0. Следовательно, опорная реакция в точке А найдена верно.

Из условия прочности выбираем двутавровое поперечное сечение

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\max}}{W} \leq [\sigma] = 210 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

где M^{\max} – максимальное значение изгибающего момента, $M^{\max} = 160 \text{ кН}\cdot\text{м}$;

$$W \geq \frac{M^{\max}}{[\sigma]} = \frac{160}{210 \cdot 10^3} = 761,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 761,9 \text{ см}^3.$$

Из сортамента выбираем двутавр № 40, для которого $W = 953 \text{ см}^3$.

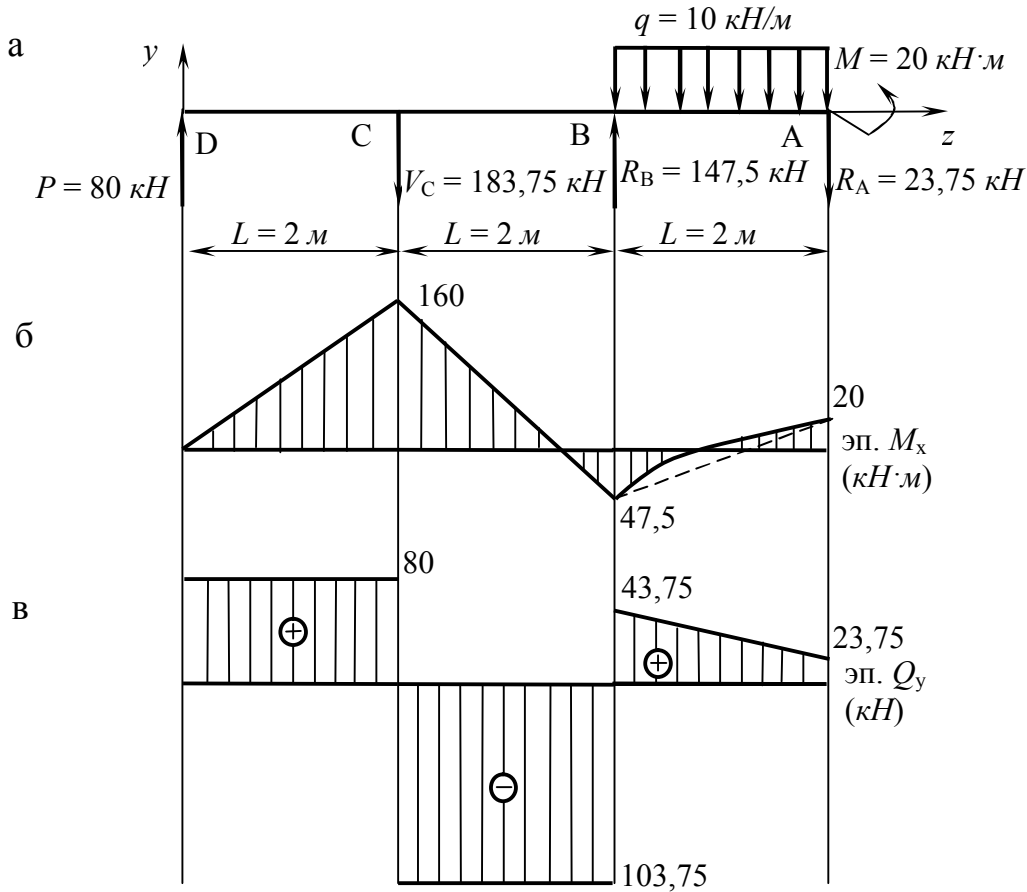


Рис. 3.2

Задача 14. Для балки (рис. 3.3а) с постоянной жесткостью участков ($EJ_x = \text{const}$) требуется:

1. Раскрыть статическую неопределимость методом сил с рациональным выбором основной системы.

2. Провести деформационную проверку правильности полученного решения.

3. Подобрать поперечное сечение балки в виде двух швеллеров, если $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$.

4. Определить угол поворота сечения одной из опор, приняв $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение

Определяем степень статической неопределимости:

$$n = (R - 3) + 3K - III_0 = (5 - 3) + 0 - 0 = 2.$$

Выбираем основную систему. Для этого исключаем связи в точке А и точке С (см. рис. 3.3б). Эквивалентная система получается путем введения сил \bar{X}_1 и \bar{X}_2 в точках С и А соответственно (см. рис. 3.3в).

Каноническое уравнение метода сил для двух раз статически неопределимой системы имеет вид

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов уравнения строим эпюры изгибающих моментов:

\bar{M}_1 от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис. 3.3г);

\bar{M}_2 от единичной силы $\bar{X}_2 = 1$ (см. рис. 3.3д);

M_p от заданной нагрузки (см. рис. 3.3е).

С использованием графоаналитического способа Верещагина для вычисления интегралов Мора находим коэффициенты уравнения (перемещения):

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{64}{3EJ}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) \right] = \frac{256}{3EJ}.$$

$$\delta_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right] = \frac{1728}{3EJ}.$$

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dz = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1240 + \frac{2}{3} \cdot 2080 \right) \right] = -\frac{43200}{3EJ}.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_p}{EJ} dz = & -\frac{1}{EJ} \left[\frac{12 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1240 + \frac{2}{3} \cdot 2080 \right) + \right. \\ & + \frac{8 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1240 + \frac{1}{3} \cdot 2080 \right) + \frac{8 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1240 + \frac{1}{3} \cdot 400 \right) + \\ & \left. + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 400 + \frac{1}{3} \cdot 1240 \right) + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 400 - \frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = -\frac{89920}{EJ}. \end{aligned}$$

Подставляем найденные коэффициенты в уравнения метода сил и вычисляем неизвестные величины X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{64}{3EJ} \cdot X_1 + \frac{256}{3EJ} \cdot X_2 - \frac{43200}{3EJ} = 0 \\ \frac{256}{3EJ} \cdot X_1 + \frac{1728}{3EJ} \cdot X_2 - \frac{89920}{EJ} = 0 \end{cases}$$

В результате решения системы уравнений находим неизвестные величины:

$$X_1 = 124,1 \text{ кН};$$

$$X_2 = 137,73 \text{ кН}.$$

Прикладываем к заданной системе найденные значения X_1 и X_2 и загружаем ее заданной нагрузкой (см. рис. 3.3ж).

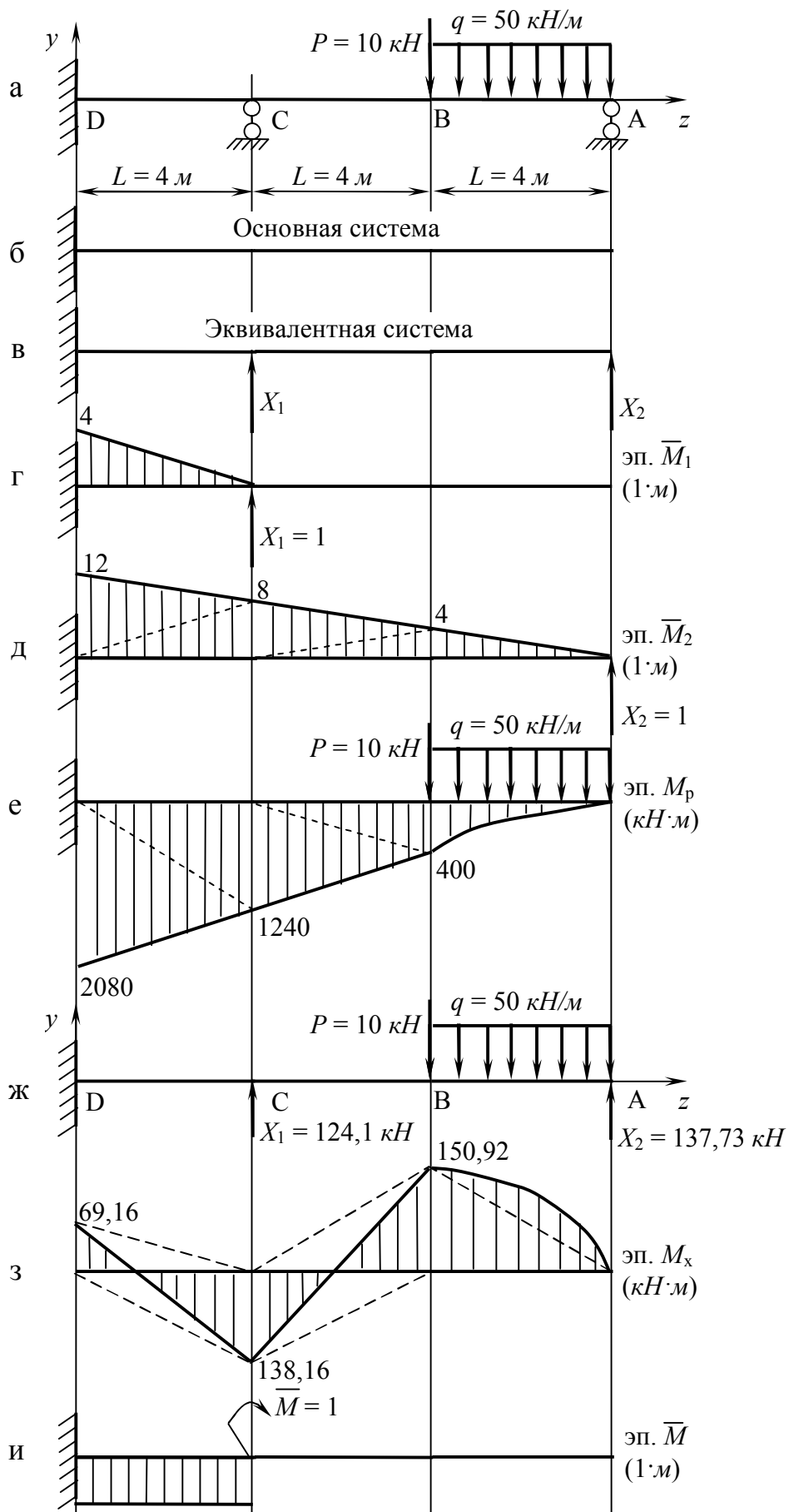


Рис. 3.3

Для заданной системы строим эпюру изгибающих моментов (рис. 3.3з).

Делаем деформационную проверку

$$\Delta_C = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_x}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{69,16 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{138,16 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 \right] = 0.$$

$$\begin{aligned} \Delta_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_x}{EJ} dz = & \frac{1}{EJ} \left[\frac{69,16 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) - \frac{138,16 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) - \right. \\ & - \frac{138,16 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 8 \right) + \frac{150,92 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \\ & \left. + \frac{150,92 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = 0. \end{aligned}$$

Деформационная проверка показала, что перемещение в точках А и С равно 0. Следовательно, опорные реакции найдены верно.

Из условия прочности выбираем поперечное сечение из двух швеллеров (рис. 3.4):

$$\sigma_{\max} = \frac{M^{\max}}{2 \cdot W_x} \leq [\sigma] = 210 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2},$$

где M^{\max} – максимальное значение изгибающего момента,

$$M^{\max} = 150,92 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$W_x \geq \frac{M^{\max}}{2 \cdot [\sigma]} = \frac{150,92}{2 \cdot 210 \cdot 10^3} = 359,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 359,4 \text{ см}^3.$$

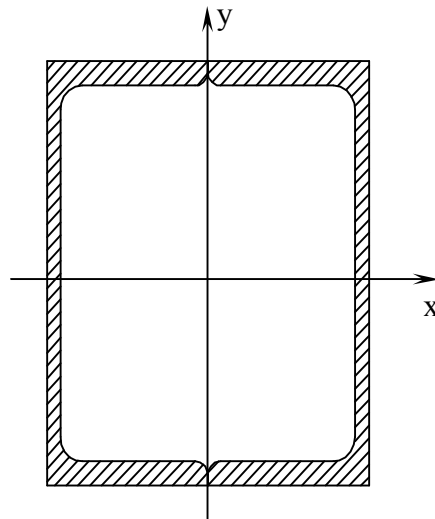


Рис. 3.4

Из сортамента выбираем швеллер № 30, для которого $W_x = 387 \text{ см}^3$. Следовательно, момент сопротивления всего сечения

$$W_x^{\text{сеч}} = 2 \cdot W_x = 2 \cdot 387 = 774 \text{ см}^3.$$

Для определения угла поворота в точке С прикладываем к этой точке единственный изгибающий момент $\bar{M} = 1$, находим опорные реакции и строим соответствующую эпюру изгибающих моментов \bar{M} (см. рис. 3.3и).

По формуле Мора, используя правило Верещагина, угол поворота в точке С равен

$$\theta_C = \Sigma \int_0^l \frac{M_x \bar{M}}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{69,16 \cdot 4}{2} \cdot 4 \cdot 1 - \frac{138,16 \cdot 4}{2} \cdot 4 \cdot 1 \right] = -\frac{138}{EJ}.$$

Задача 15. Для рамы с постоянной жесткостью участков ($EJ_x = \text{const}$) (рис. 3.5а) построить эпюры нормальных N_z и перерезывающих Q_y сил и изгибающих моментов M_x .

Дано:

$$q = 50 \text{ кН/м}; P = 10 \text{ кН}; L = 4 \text{ м}.$$

Решение

Определяем степень статической неопределимости.

$$n = (R - 3) + 3K - \text{III}_0 = (4 - 3) + 0 - 0 = 1$$

Выбираем основную систему. Для этого исключаем связь в точке В и заменяем ее действие силой \bar{X}_1 . Эквивалентная система показана на рис. 3.5б.

Каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой системы имеет вид

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для нахождения коэффициентов уравнения строим эпюры изгибающих моментов:

\bar{M}_1 от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ (см. рис. 3.5в);

M_p от заданной нагрузки (см. рис. 3.5г).

С использованием графоаналитического способа Верещагина для вычисления интегралов Мора находим коэффициенты уравнения (перемещения):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \right] = \frac{85,33}{EJ}. \\ \Delta_{1p} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_p}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{360 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{320 \cdot 4}{2} \cdot 4 + \frac{360 \cdot 4}{2} \cdot 4 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \frac{6826,67}{EJ}. \end{aligned}$$

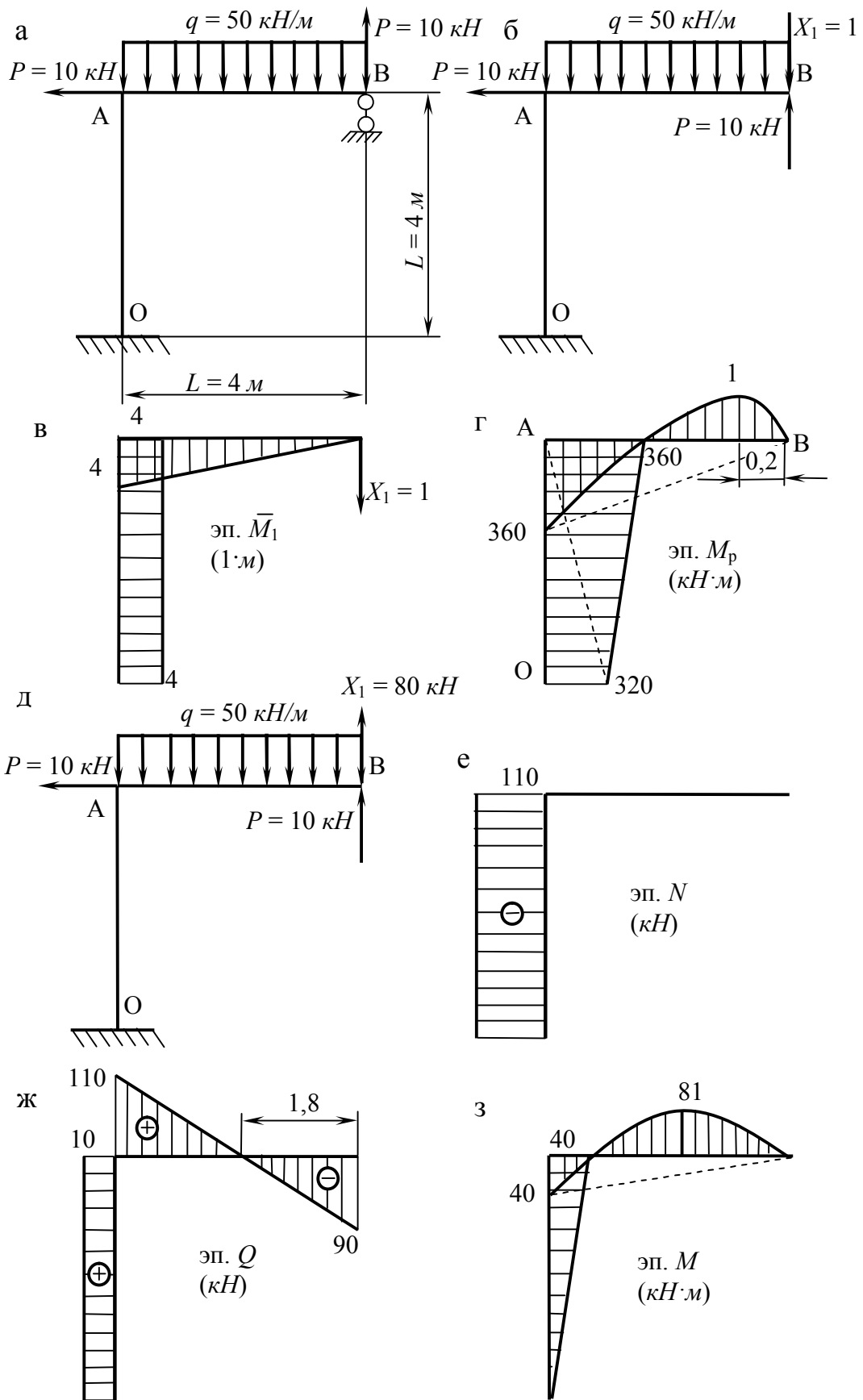


Рис. 3.5

Подставляем найденные коэффициенты в каноническое уравнение метода сил и вычисляем неизвестную величину X_1 :

$$\frac{85,33}{EJ} \cdot X_1 + \frac{6826,67}{EJ} = 0,$$

откуда $X_1 = -80$ кН.

Прикладываем к заданной системе найденное значение X_1 , меняя его направление на противоположное, и загружаем ее заданной нагрузкой (см. рис. 3.5д).

Для заданной системы строим эпюры нормальных и перерезывающих сил и изгибающих моментов (рис. 3.5е, 3.5ж и 3.5з).

Делаем деформационную проверку:

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{40 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{40 \cdot 4}{2} \cdot 4 - \frac{50 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = 0.$$

Деформационная проверка показала, что перемещение в точке В равно 0. Следовательно, опорная реакция в точке В найдена верно.

4. Устойчивость упругих систем

Комментарий

Для сжатого упругого стержня критическая сила и напряжение определяются по формулам Л. Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\Lambda^2},$$

где $L = \mu l$ – приведенная длина стержня; μ – коэффициент приведения длины Ясинского к основному случаю шарнирного закрепления концов; Λ – гибкость стержня,

$$\Lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}},$$

$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}$, J_{\min} – минимальное значение осевого момента инерции поперечного сечения с площадью F .

Коэффициент приведения длины μ Ясинского зависит от способов закрепления концов стержня. Схемы различного закрепления концов стержня и соответствующие значения коэффициентов μ приведены на рис. 4.1. Величина n обозначает число полуволн, образующихся при выпучивании по длине стержня.

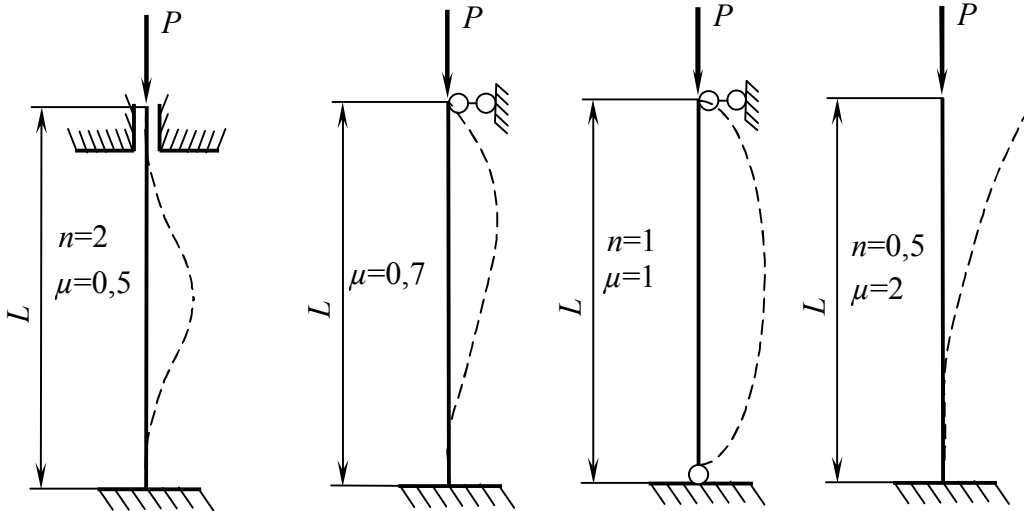


Рис. 4.1

Формулы Эйлера справедливы пока напряжение $\sigma_{кр} \leq \sigma_{нц}$, где $\sigma_{нц}$ – предел пропорциональности. При $\sigma_{кр} = \sigma_{нц}$ следуют предельные значения

$$\Lambda_* = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}.$$

Если $\Lambda \geq \Lambda_*$, то формулы Эйлера справедливы. Если напряжение $\sigma \geq \sigma_{нц}$, то критическая сила P и критическое напряжение определяются по формулам Энгессера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E_k J_{\min}}{(\mu l)^2}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_k}{\Lambda^2},$$

где E_k носит название *касательного модуля*, представляющего собой тангенс угла наклона касательной к диаграмме сжатия в точке с текущим значением напряжения σ . Касательный модуль зависит от значения σ , то есть $E_k = E_k(\sigma)$.

Еще более простой аппроксимацией зависимости $\sigma_{кр} - \Lambda$ является зависимость Ф. Ясинского:

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \sigma_T, & \text{если } 0 \leq \Lambda \leq \Lambda_T, \\ a - b\Lambda, & \text{если } \Lambda_T \leq \Lambda \leq \Lambda_*, \end{cases}$$

где коэффициенты

$$a = \frac{\sigma_T \Lambda_* - \sigma_{нц} \Lambda_T}{\Lambda_* - \Lambda_T}, \quad b = \frac{\sigma_T - \sigma_{нц}}{\Lambda_* - \Lambda_T}.$$

Условие устойчивости при практическом методе расчета записывается в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \leq \varphi(\Lambda) \cdot [\sigma]_{сж},$$

где $\varphi(\Lambda)$ – коэффициент продольного изгиба.

Следует отметить, что при решении задач на устойчивость требуется вычислять геометрические характеристики сечения. Формулы для определения геометрических характеристик сечения и примеры решения задач приведены в подразделе 1.3.

Примеры решения задач

Задача 16. Определить допускаемую сжимающую силу P на стальной стержень, поперечное сечение и схема закрепления которого приведены на рис. 4.2. При решении использовать таблицу значений коэффициента снижения допускаемого напряжения на сжатие φ для Ст. 3. Основное допускаемое напряжение принять $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Дано:

$L = 4 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

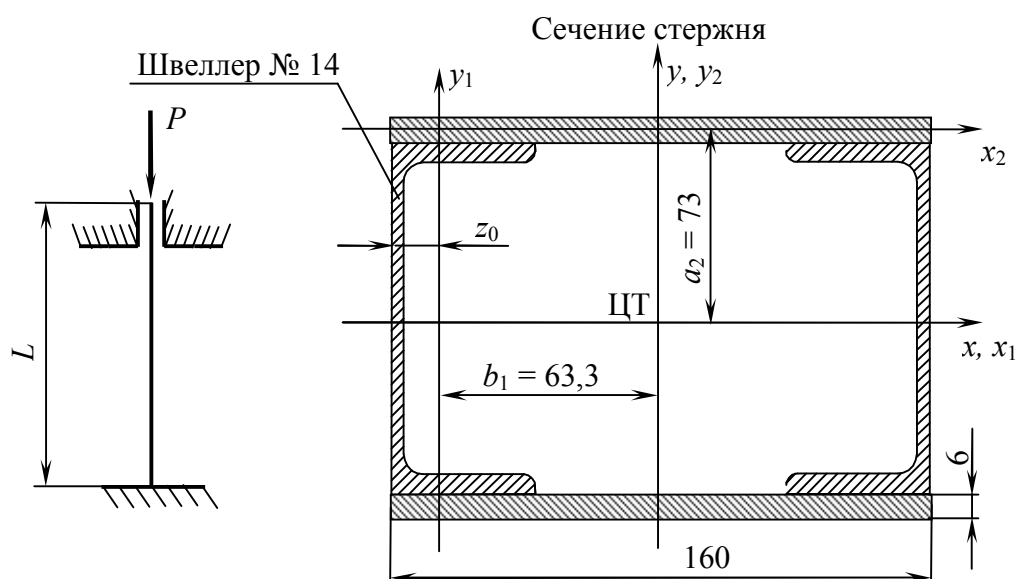


Рис. 4.2

Решение

Для решения задачи необходимо определить геометрические характеристики сечения стержня.

Заданное сечение состоит из двух швеллеров № 14 и двух листов 160 x 6.

Определяем геометрические характеристики отдельных элементов сечения. Рассмотрим швеллер № 14. Из сортамента выбираем:

площадь $F_1 = 15,6 \text{ см}^2$;

момент инерции относительно оси x_1 $J_{x1} = 491 \text{ см}^4$;

момент инерции относительно оси y_1 $J_{y1} = 45,4 \text{ см}^4$;
 расстояние от оси y_1 до наружной грани стенки $z_0 = 1,67 \text{ см}$.
 Рассмотрим лист размером 160×6 :
 площадь $F_2 = 16 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ см}^2$;

момент инерции относительно оси x_2 $J_{x2} = \frac{16 \cdot 0,6^3}{12} = 0,288 \text{ см}^4$;

момент инерции относительно оси y_2 $J_{y2} = \frac{0,6 \cdot 16^3}{12} = 204,8 \text{ см}^4$.

Площадь всего сечения:

$$F = 2 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 = 2 \cdot 15,6 + 2 \cdot 9,6 = 50,4 \text{ см}^2.$$

Так как сечение симметрично относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей, то центр тяжести сечения находится на пересечении осей симметрии, а центральные оси x и y проходят через центр тяжести сечения вдоль осей симметрии.

Момент инерции относительно оси x :

$$J_x = 2 \cdot (J_{x1} + a_1^2 \cdot F_1 + J_{x2} + a_2^2 \cdot F_2) = 2 \cdot (491 + 0 + 0,288 + 7,3^2 \cdot 9,6)$$

$$J_x = 2006 \text{ см}^4.$$

Момент инерции относительно оси y :

$$J_y = 2 \cdot (J_{y1} + b_1^2 \cdot F_1 + J_{y2} + b_2^2 \cdot F_2) = 2 \cdot (45,4 + 6,33^2 \cdot 15,6 + 204,8 + 0)$$

$$J_y = 1750 \text{ см}^4.$$

$$J_{\min} = J_y = 1750 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{1750}{50,4}} = 5,9 \text{ см},$$

где $J_{\min} = J_y = 1750 \text{ см}^4$.

Геометрические характеристики сечения стержня известны, переходим к вычислению критической силы и определению коэффициента запаса устойчивости.

Гибкость стержня:

$$\Lambda = \frac{\mu \cdot L}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 400}{5,9} = 34.$$

Из условия устойчивости для сжатого стержня найдем максимальную допускаемую нагрузку:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} \leq \varphi(\Lambda) \cdot [\sigma],$$

откуда $P_{\max} \leq \varphi(\Lambda) \cdot [\sigma] \cdot F = 0,938 \cdot 160 \cdot 10^3 \cdot 50,4 \cdot 10^{-4} = 756,4 \text{ кН}$,

где $\varphi_{\Lambda=34} = 0,95 - \frac{0,95 - 0,92}{10} \cdot 4 = 0,938$.

Критическая сила определяется по формуле Л. Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1750 \cdot 10^{-8}}{(0,5 \cdot 4)^2} = 8627 \cdot 10^3 \text{ Н} = 8627 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P_{\max}} = \frac{8627}{756,4} = 11,4.$$

Задача 17. Для сжатого силой P стального стержня длиной L и заданной формы поперечного сечения (рис. 4.3) подобрать в соответствии с методом Ф.С. Ясинского размеры данного сечения. Способ закрепления стержня приведен на рис. 4.3.

Дано:

$P = 600 \text{ кН}$, $L = 3,8 \text{ м}$, $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$, материал стержня – чугун.

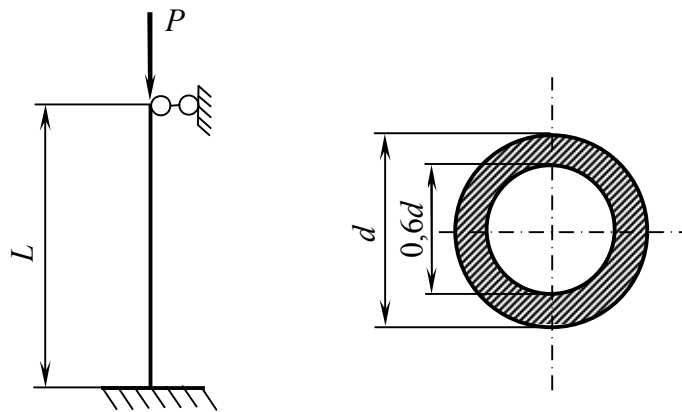


Рис. 4.3

Решение

Подготовка к итерационным вычислениям

Из условия устойчивости имеем

$$F \geq \frac{P}{\phi(\Lambda) \cdot [\sigma]} = \frac{600}{\phi(\Lambda) \cdot 120 \cdot 10^3} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\phi(\Lambda)} \text{ м}^2.$$

Площадь поперечного сечения:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi (0,6d)^2}{4} = 0,5d^2.$$

Момент инерции сечения:

$$J_x = J_y = J_{\min} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi (0,6d)^4}{64} = 0,043d^4.$$

Радиус инерции:

$$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{0,043d^4}{0,5d^2}} = 0,29d .$$

Гибкость стержня:

$$\Lambda = \frac{\mu \cdot L}{i} = \frac{0,7 \cdot 380}{0,29d} = \frac{917}{d} \text{ 1/см} .$$

Учтено, что коэффициент приведения длины μ для заданного стержня равен 0,7.

Подбор сечения методом последовательных приближений

Первое приближение $\varphi_1(\Lambda) = 0,5$.

$$F_1 \geq \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\varphi_1(\Lambda)} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 100 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)} = 100 \text{ см}^2 .$$

$$F_1 = 0,5d^2 = 100, \text{ откуда } d = 14,1 \text{ см} .$$

Гибкость стержня:

$$\Lambda = \frac{917}{d} = \frac{917}{14,1} = 65 \text{ (1/см)} .$$

По таблицам получаем значение $\varphi_1^*(\Lambda) = 0,835$.

Проверка:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_1^*(\Lambda) \cdot F_1} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,835 \cdot 100 \cdot 10^{-4}} = 72 \cdot 10^6 \text{ Па} = 72 \text{ МПа} < [\sigma] = 120 \text{ МПа} .$$

Недонагружение конструкции составляет:

$$\Delta = \frac{|\sigma - [\sigma]|}{\sigma} \cdot 100\% = \frac{|72 - 120|}{120} \cdot 100\% = 40\% ,$$

что приведет к перерасходу материала. Предельное отклонение от допускаемого напряжения не должно превышать 5%. Следовательно, расчет продолжаем.

$$\text{Второе приближение} - \varphi_2(\Lambda) = \frac{\varphi_1(\Lambda) + \varphi_1^*(\Lambda)}{2} = \frac{0,5 + 0,835}{2} = 0,67 .$$

$$F_2 \geq \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\varphi_2(\Lambda)} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,67} = 74,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 74,6 \text{ см}^2 .$$

$$F_2 = 0,5d^2 = 74,6 ,$$

откуда $d = 12,2 \text{ см}$.

Гибкость стержня:

$$\Lambda = \frac{917}{d} = \frac{917}{12,2} = 75 \text{ (1/см)} .$$

По таблицам получаем значение $\varphi_2^*(\Lambda) = 0,78$.

Проверка:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_2^*(\Lambda) \cdot F_2} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,78 \cdot 74,6 \cdot 10^{-4}} = 103 \cdot 10^6 \text{ Па} = 103 \text{ МПа} < [\sigma] = 120 \text{ МПа}.$$

Недонагружение конструкции составляет:

$$\Delta = \frac{|\sigma - [\sigma]|}{\sigma} \cdot 100\% = \frac{|103 - 120|}{120} \cdot 100\% = 14\% > 5\%,$$

следовательно, расчет продолжаем.

$$\text{Третье приближение} - \varphi_3(\Lambda) = \frac{\varphi_2(\Lambda) + \varphi_2^*(\Lambda)}{2} = \frac{0,67 + 0,78}{2} = 0,725.$$

$$F_3 \geq \frac{5 \cdot 10^{-3}}{\varphi_3(\Lambda)} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,725} = 69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 69 \text{ см}^2.$$

$$F_3 = 0,5d^2 = 69, \text{ откуда } d = 11,7 \text{ см}.$$

Гибкость стержня:

$$\Lambda = \frac{917}{d} = \frac{917}{11,7} = 78,4 \text{ (1/см)}.$$

По таблицам получаем значение $\varphi_3^*(\Lambda) = 0,76$.

Проверка:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi_3^*(\Lambda) \cdot F_3} = \frac{600 \cdot 10^3}{0,76 \cdot 69 \cdot 10^{-4}} = 114,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 114,4 \text{ МПа} < [\sigma] = 120 \text{ МПа}.$$

Недонагружение конструкции составляет

$$\Delta = \frac{|\sigma - [\sigma]|}{\sigma} \cdot 100\% = \frac{|114,4 - 120|}{120} \cdot 100\% = 4,7\% < 5\%, \text{ что допустимо для}$$

рассчитываемой конструкции.

Окончательно принимаем диаметр сечения $d = 11,7 \text{ см}$.

5. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии

Комментарий

Крутящий момент на валу определяется по формуле

$$M_{кр} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n} \text{ (кН}\cdot\text{м)},$$

где N – мощность на валу, кВт;

n – частота вращения, об/мин.

Окружное усилие определяется из выражения

$$M_{кр} = P \cdot \frac{D}{2},$$

где P – сила, вызывающая вращение шкива;

D – диаметр шкива.

Суммарный изгибающий момент

$$M_u^{сум} = \sqrt{(M_u^{гор})^2 + (M_u^{верт})^2},$$

где $M_u^{гор}$ – изгибающий момент, действующий в горизонтальной плоскости;

$M_u^{верт}$ – изгибающий момент, действующий в вертикальной плоскости.

Условие прочности Мизеса:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Условие прочности Сен-Венана:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

где σ – нормальные напряжения от изгиба, $\sigma = \frac{M_u^{сум}}{W}$,

W – момент сопротивления сечения;

τ – касательные напряжения от кручения $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p}$,

W_p – полярный момент сопротивления сечения.

Примеры решения задач

Задача 18. Для вала (рис. 5.1а), изготовленного из стали 45, требуется:

1. Определить крутящий момент на валу по заданной мощности и числу оборотов.
2. Определить окружные, осевые и радиальные усилия, действующие на вал, если $D_1 = 0,2$ м, $D_2 = 0,4$ м.
3. Построить эпюру крутящего момента.
4. Построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных и вертикальных сил.
5. Построить эпюру суммарного изгибающего момента.
6. При помощи эпюр крутящего и суммарного изгибающего моментов найти и вычертить опасное сечение вала, указав на нем опасные точки (частицы).
7. Изобразить напряженное состояние в опасной точке (частице).
8. Подобрать диаметр вала из условий прочности Сен-Венана и Мизеса.

Дано:

$N = 40 \text{ кВт}$, $n = 80 \text{ об/мин.}$, $\ell_1 = 0,5 \text{ м}$, $\ell_2 = 1,5 \text{ м}$, $\ell_3 = 1 \text{ м}$, $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$,
 $D_1 = 0,2 \text{ м}$, $D_2 = 0,4 \text{ м}$.

Решение

1. Определяем крутящий момент на валу:

$$M_{кр} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{N}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{40}{80} = 4,78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Определяем окружные усилия на валу:

$$M_{кр} = P_1 \cdot \frac{D_1}{2} - 0,5P_1 \cdot \frac{D_1}{2} = 0,5P_1 \cdot \frac{D_1}{2},$$

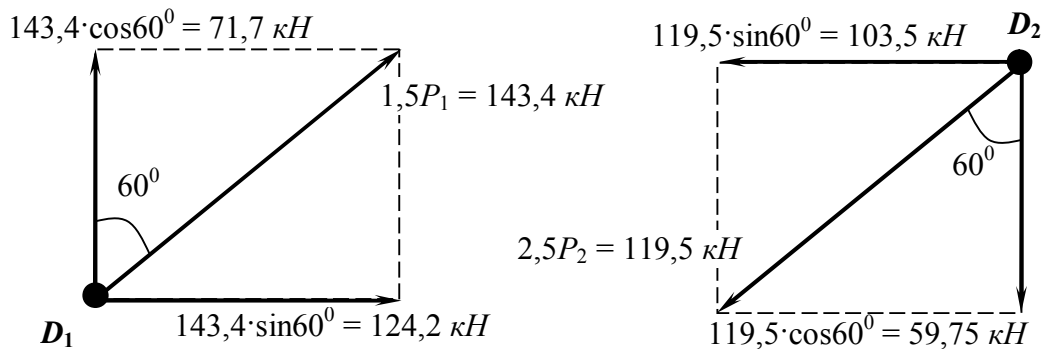
$$M_{кр} = 1,5P_2 \cdot \frac{D_2}{2} - P_2 \cdot \frac{D_2}{2} = 0,5P_2 \cdot \frac{D_2}{2},$$

откуда

$$P_1 = \frac{4M_{кр}}{D_1} = \frac{4 \cdot 4,78}{0,2} = 95,6 \text{ кН},$$

$$P_2 = \frac{4M_{кр}}{D_2} = \frac{4 \cdot 4,78}{0,4} = 47,8 \text{ кН}.$$

По найденным окружным усилиям определяем силы, действующие на вал и раскладываем эти силы на горизонтальные и вертикальные составляющие.



3. Строим эпюру крутящих моментов в предположении, что трения в подшипниках нет (рис. 5.1б).

4. Строим эпюры изгибающих моментов от сил, изгибающих вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно.

Расчетная схема для построения эпюры изгибающих моментов в горизонтальной плоскости приведена на рис. 5.1в.

Расчетная схема для построения эпюры изгибающих моментов в вертикальной плоскости приведена на рис. 5.1д.

Эпюры изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно приведены на рис. 5.1г, е.

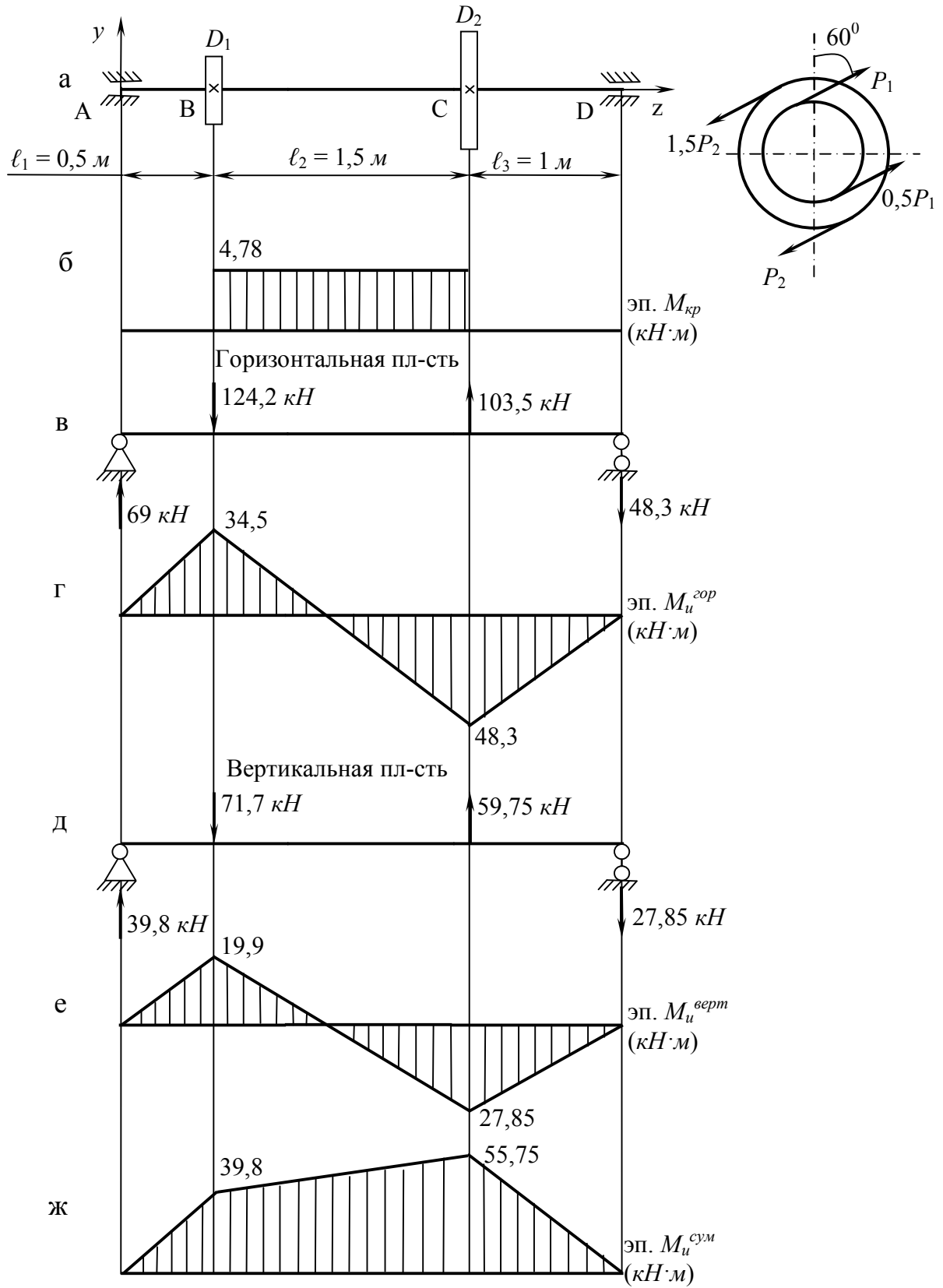


Рис. 5.1

5. Строим эпюру суммарного изгибающего момента.

$$M_u^{сум} = \sqrt{(M_u^{гор})^2 + (M_u^{верт})^2}.$$

Значение момента в точках А и D:

$$M_u^{сум} \Big|_{m.A} = M_u^{сум} \Big|_{m.D} = 0.$$

Значение момента в точке В:

$$M_u^{сум} \Big|_{m.B} = \sqrt{(34,5)^2 + (19,9)^2} = 39,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значение момента в точке С:

$$M_u^{сум} \Big|_{m.C} = \sqrt{(48,3)^2 + (27,85)^2} = 55,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Определяем опасное сечение вала и показываем напряженное состояние в опасной точке.

Наиболее опасным будет сечение, где действует максимальный суммарный изгибающий момент (сечение С). При этом в сечении С слева от шкива действует крутящий момент. Следовательно, опасным будет сечение С слева от шкива. На рис. 5.2а изображено опасное сечение.

Наиболее опасными будут точки, лежащие в плоскости действия суммарного изгибающего момента (см. рис. 5.2а). В окрестности одной из точек выделяем элемент и показываем его напряженное состояние (см. рис. 5.2б).

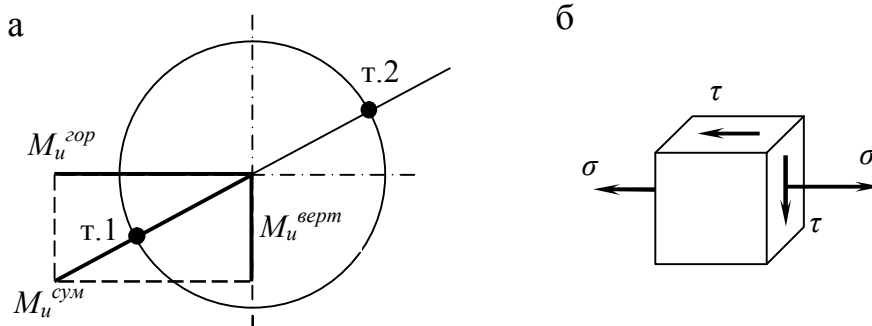


Рис. 5.2

7. Подбор диаметра вала.

Условие прочности Мизеса:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma],$$

где σ – нормальные напряжения от изгиба, $\sigma = \frac{M_u^{сум}}{W}$,

W – момент сопротивления сечения. Для круглого поперечного сечения, $W = \frac{\pi d^3}{32}$;

τ – касательные напряжения от кручения, $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p}$;

W_p – полярный момент сопротивления сечения. Для круглого поперечного сечения, $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

$$\sigma_{экс} = \sqrt{\left(\frac{32M_u^{сум}}{\pi d^3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16M_{кр}}{\pi d^3}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Откуда $d = \sqrt[6]{\frac{1024 \cdot (M_u^{сум})^2 + 768 \cdot (M_{кр})^2}{\pi^2 \cdot [\sigma]^2}}$.

$$d = \sqrt[6]{\frac{1024 \cdot (55,75)^2 + 768 \cdot (4,78)^2}{\pi^2 \cdot (70 \cdot 10^3)^2}} = 0,2 \text{ м.}$$

Условие прочности Сен-Венана:

$$\sigma_{экс} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

$$\sigma_{экс} = \sqrt{\left(\frac{32M_u^{сум}}{\pi d^3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16M_{кр}}{\pi d^3}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Откуда $d = \sqrt[6]{\frac{1024 \cdot (M_u^{сум})^2 + 1024 \cdot (M_{кр})^2}{\pi^2 \cdot [\sigma]^2}}$.

$$d = \sqrt[6]{\frac{1024 \cdot (55,75)^2 + 1024 \cdot (4,78)^2}{\pi^2 \cdot (70 \cdot 10^3)^2}} = 0,2 \text{ м.}$$

Библиографический список

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. М.: ГИТЛ, 1976. 607 с.
2. Зубчанинов, В.Г. Сопротивление материалов [Текст]: учеб. пос. / В.Г. Зубчанинов. 2-е изд. Тверь: ТГТУ, 2003. Кн. 1. 224 с.
3. Зубчанинов, В.Г. Сопротивление материалов [Текст]: учеб. пос. / В.Г. Зубчанинов. 2-е изд. Тверь: ТГТУ, 2005. Кн. 2. 350 с.
4. Зубчанинов, В.Г. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов [Текст]: учеб. пос. Ч. 1. / В.Г. Зубчанинов, В.Н. Ведерников, Е.Г. Алексева; под общ. ред. В.Г. Зубчанинова. 1-е изд. Тверь: ТГТУ, 2007. 152 с.
5. Зубчанинов, В.Г. Руководство к практическим занятиям по сопротивлению материалов [Текст]: учеб. пос. Ч. 2. / В.Г. Зубчанинов, В.Н. Ведерников, Е.Г. Алексева; под общ. ред. В.Г. Зубчанинова. 1-е изд. Тверь: ТГТУ, 2009. 208 с.
6. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.

Оглавление

Введение	3
1. Построение эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии, кручении и прямом плоском изгибе с расчетами на прочность и жесткость	4
1.1. Растяжение-сжатие бруса	4
Комментарий.....	4
Примеры решения задач.....	5
Задача 1.	5
Задача 2.	9
1.2. Кручение вала	11
Комментарий.....	11
Примеры решения задач.....	13
Задача 3.	13
1.3. Геометрические характеристики поперечных сечений стержня	18
Комментарий.....	18
Примеры решения задач.....	19
Задача 4.	19
Задача 5.	21
Задача 6.	23
1.4. Изгиб стержневых систем	26
Комментарий.....	26
Примеры решения задач.....	28
Задача 7.	28
Задача 8.	32
Задача 9.	37
2. Определение перемещений в балках и стержневых системах энергетическим методом с использованием формулы Мора	40
Комментарий.....	40
Примеры решения задач.....	42
Задача 10.	42
Задача 11.	46
Задача 12.	50
3. Расчет статически неопределимых балок методом сил	53
Комментарий.....	53
Примеры решения задач.....	54
Задача 13.	54
Задача 14.	57
Задача 15.	61
4. Устойчивость упругих систем	63
Комментарий.....	63
Примеры решения задач.....	65
Задача 16.	65
Задача 17.	67
5. Расчеты на прочность при сложном напряженном состоянии	69
Комментарий.....	69
Примеры решения задач.....	70
Задача 18.	70
Библиографический список	74

**Валерий Владимирович Гараников,
Владимир Владимирович Щелин**

**Руководство к решению курсовых задач
по курсам «Техническая механика», «Прикладная механика»
(раздел «Сопроотивление материалов»)**

Учебное пособие

Издание первое

Редактор А.Ю. Малешкина

Корректор

Технический редактор А.Н. Безрукова

Подписано в печать

Формат

Бумага писчая

Физ. печ. л.

Усл. печ. л.

Уч.-изд. л.

Тираж экз.

Заказ №

С –

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, 22